§7-2. 係数が定数の場合の線形DEの解法.

$g=0$ の時の解を斉次解と言う.

target 問題を $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \sim (*)$ とし、

$a_0 \sim a_{n-1}$ は単なる定数とする.

Th. 特解と斉次解.

$$\text{DE}(*)\text{の一般解} = \overbrace{\text{DE}(*)\text{の特殊解}}^{A} + \overbrace{\text{DE}(*)\text{の斉次解の一般解}}^{B}$$ である.

つまり、DE(*)に対して、$g(x)$ があるとして とにかく具体解を1つでも得れば、

$g=0$ としての一般解にその具体解を足せば、DEの一般解が得られる.

注 DE(*)の斉次一般解は n 個の基本解 $u_k(x)$, $k=1\sim n$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ と書ける.

基本解: ${}^\forall c_k=0$ 以外では、${}^\forall x$ で $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)=0$ とならないような $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ のコト.

c_k: 任意定数

斉次
$\left(q(x)=0\right)$ な時の一般解

まずは B から…

Th. B の具体形.
斉次
$\left(q(x)=0\right)$ な時の一般解

注 以降、簡単の為 $\frac{d}{dx}=D$ として書く

$\left(\text{式}(*)\text{で } q=0\right) \Leftrightarrow \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)}_{} y = 0 \sim (*2)$ の〰〰の部分を因数分解して

$\qquad = (D-\lambda_1)^{l_1}(D-\lambda_2)^{l_2}\cdots(D-\lambda_m)^{l_m}$ としよう. なお、λ_i は複素数であっても良い.

この時,

1. $(*2)$ の一般解は、$(D-\lambda_i)^{l_i} y = 0$ の一般解の和 である.

2. $(D-\lambda_i)^{l_i} y = 0$ の一般解は $\left(\sum_{k=0}^{l_i-1} c_{i,k} x^k\right) e^{\lambda_i x}$ である ($c_{i,0} \sim c_{i,l_i-1}$ は任意定数)

例. $(D-1)^2(D-2)y=0$ の一般解は $y(x) = (c_0 + c_1 x)e^x + c_2 e^{2x}$ である.

$\left(\begin{array}{l}\text{斉次でない}\\ q(x)\neq 0\end{array}\right)$ 時の具体解（特解）

次に Ⓐ について．

注 このページのギロン・手法は「演算子法」と呼ばれるコトも．

$\left(\begin{array}{l}\text{斉次でない}\\ q(x)\neq 0\end{array}\right)$ 時の具体解（特解）

Th. Ⓐ の為の公式． 前ページの式(*)を因数分解して $(D-\lambda_1)^{l_1}\cdots(D-\lambda_m)^{l_m} y = q$ とするところまでは同様として、

$(D-\lambda)y = q$ の解は、（#7-1-4 のその③を用いて）$y(x) = (R(x)+c)e^{\lambda x}$，ただし，$R$ は $qe^{-\lambda x}$ の原始函数．

Ⓐ としては解は1つ求まれば十分なので，この C は適当に決めちゃえ．

例．$\underset{(D-1)(D-2)}{(D^2-3D+2)}y = e^x$ の特解は，記号的に $\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x$ と書いて、

$$\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x = \frac{1}{D-1}\cdot(R+c)e^{2x},\ \left(\text{ただし } R = \int e^x\cdot e^{-2x}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\right)$$

$c=0$ と勝手に決めて，

$$= \frac{-1}{D-1}e^x = (-1)(\tilde{R}+\tilde{c})e^x,\ \left(\text{ただし，} \tilde{R} = \int e^x\cdot e^{-x}dx = x\right)$$

$\tilde{c}=0$ 〃 ，

$$= -xe^x.$$

注：あくまで $(D^2-3D+2)y = e^x$ の解の1つ

(Ⓐの話の続き)

($\frac{d}{dx}$ の多項式) × $f(x) = g(x)$ を解く際のいくつかの便利な公式

$\frac{d}{dx}$ ‖ D の多項式 $p(D)$ に対し、 $p(D)f = g \overset{d}{\Leftrightarrow} f = \frac{1}{p(D)}g$ と記号的に書くコトにして

1. シフト: $\frac{1}{p(D)}g(x) = e^{\lambda x}\frac{1}{p(D+\lambda)}\left(e^{-\lambda x}\cdot g(x)\right).$

2. 指数関数が対象の時: $p(\lambda) \neq 0$ の時、 $\frac{1}{p(D)}e^{\lambda x} = \frac{1}{p(\lambda)}e^{\lambda x}.$ $p(\lambda)=0$ の時は、Ⓐの為の公式を使おう。

3. 多項式が対象の時: $g(x)$ が x の n 次多項式ならば、 $\frac{1}{1-aD}\cdot g(x) = \left\{1 + aD + (aD)^2 + \cdots + (aD)^n\right\}g(x)$

例. $(D+2)y = x^2$ の特解は、 $\frac{1}{D+2}x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}D}x^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2\right)x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right).$