§7-1. 1階の微分方程式 differential equations (DE)

→ 科学技術のあらゆる場面で登場するぞ!!

微分方程式とは?

この階数を微分方程式の階数と呼ぶ

→ 関数 $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、その(偏)微分 $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ や高階の(偏)微分 $\frac{\partial^k y}{\partial x_i^k}$ を含む方程式のコト。

(「方程式」なので、それを解くと解が得られる。この場合は関数 $y(x)$ が解となる。)

例. $y = y(x)$ に対して、$\frac{dy}{dx} = 3y$ は微分方程式である。

「y の微分と y が比例する」という関係を示している。

ちなみにこの DE の解は $y(x) = Ce^{3x}$ (ただし C は定数) である。(式に代入して確かめよう)

線形性; 方程式中に微分項が1次項としてのみ現われる時、つまり、DE が

$$\sum_{i,k} p_{i,k}(x) \frac{\partial^k y}{\partial x_i^k} = q(x)$$

の形の時、これを線形な DE と言う。

この $p_{i,k}$ が x に依存しない定数だと計算が楽だよ。→ §7.2へ。

斉次性: $\frac{\partial^k y}{\partial x^k}$ が含まれない項が存在しない時、その DE を斉次形であると言う。

以下，DEを解く為の知識を4つ解説する．

DEの
その① **変数分離形**：DEで，$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ の形のものを言う．原理的には，解 $y(x)$ が求まる．

というのも，$\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ と変形して，両辺を別々に積分して，$\underbrace{\int \frac{1}{g(y)}dy}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)dx}_{F(x)} + C$ とする．

$G(y) = F(x) + C$ ← 積分定数 〜(*) が成り立ち，これにはもう微分は含まれていないので これを解けば $y = y(x)$ が求まる．

↓ 両辺を $\frac{d}{dx}$ すると

$\dfrac{dG}{dx} = \dfrac{dG}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{g(y)} \cdot f(x)g(y) = f(x)$，$\dfrac{d(F+C)}{dx} = f(x)$ となり，確かに成り立つコトが分かる．

㊟ $\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C$ （← 微分すると確かめられる）

例．$\dfrac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy = xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$ （cは定数）$\Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} = c'e^{\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow$ （解）$y = c'e^{\frac{1}{2}x^2}$，c'は任意定数

㊟ このように任意定数を残した一般形の解を **一般解** と言い，
その定数に具体的に数字を代入した解を **特殊解** と言う

DEの

その② 同次形 ： $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形のものを言う。

$z(x) := \dfrac{y}{x}$ として y を消去し、$\dfrac{dz}{dx} = \cdots$ の式に変形すると①変数分離形にできる。

実際、$y = xz$ なので、$y' = z + xz'$ より、

$$z + xz' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(z) \Leftrightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{x\text{のみの式}} \cdot \underbrace{\{f(z) - z\}}_{z\text{のみの式}}$$

となり、変数分離形にできている。

例. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - 1$ に対して、
($x \neq 0$ として)

$z := \dfrac{y}{x}$ とおくと $y' = (xz)' = z + xz'$ と、元の問題 $y' = \dfrac{y}{x} - 1$ から y' を消去して $z + xz' = z - 1$. よって $z' = -1/x$.

よって両辺を x で積分して $z(x) = -\ln|x| + C$. で、$z = \dfrac{y}{x}$ を思い出すと、$y(x) = -x\left(\ln|x| + C\right)$.
(C は定数)

その③ 1階線形DEの解の公式：

$\frac{dP}{dx}=p$,　　$\frac{dR}{dx}=qe^{P}$

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ というDEは、$P(x)$ を $p(x)$ の原始函数，$R(x)$ を qe^{P} の原始函数とすると

解として $y(x)=\left(R(x)+c\right)\cdot e^{-P(x)}$ を持つ.

例. $\frac{dy}{dx}+xy=x$ に対し、$P=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$ なので、$R=\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx=\int\frac{d}{dx}(e^{\frac{1}{2}x^2})dx=e^{\frac{1}{2}x^2}$.

よって、$y(x)=\left(e^{\frac{1}{2}x^2}+c\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}=1+ce^{-\frac{1}{2}x^2}$.

その③′：ベルヌーイのDE　$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m$，$m$：整数

$m\neq 0,1$ の時 $z:=y^{1-m}$ とすると z に対する1階の線形DEになり、上のその③が使える.

その④ 完全微分形.

DE を $P(x,y)+Q(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ と書いて、 $\overbrace{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0}^{(*)}$ と表わす. この時、

$P=\dfrac{\partial}{\partial x}F,\ Q=\dfrac{\partial}{\partial y}F$ となる $F(x,y)$ が存在する時、(*) を完全微分形と言い、この DE の解は $F(x,y)=\overset{\text{任意定数}}{C}$ である.

理屈は easy. $P=F_x,\ Q=F_y$ なんだから、 $\overbrace{F_x dx+F_y dy}^{=dF}=0 \Leftrightarrow F=\text{const}.$

Point! 完全微分形の時は、 $F(x,y):=\displaystyle\int_a^x P(s,b)\,ds+\int_b^y Q(x,t)\,dt$ と決めれば良い.
(a, b は勝手に決めて良い).

注 Th. 式(*) が完全微分形である $\Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}P=\dfrac{\partial}{\partial x}Q$. ← (*) が「使える式」かどうかを check できる.

その④' 積分因子:

(*) が完全微分形でなくとも、式に $M(x,y)$ を掛けるとそうなることがある.

その時、この M を積分因子と言う.

まあ、そんなものが都合良く見つかることはない.

教科書 p.162 には見つかるケースが書いてあるが、まあ無視して良かろう…