

積分：微分の逆操作から計算技法へ

講義および自宅演習、自学自習

今日の構成

口頭講義で扱う基本内容

- 不定積分：微分の逆操作
- 積分定数と基本公式
- 定積分：原始関数の差と符号付き面積
- 置換積分と部分積分

自習で広げる内容

- 逆三角関数を含む公式
- 平方根を含む積分公式
- 公式の導出と確認

自宅演習

基本公式・置換積分・部分積分を使い分ける練習を行う。

今日の目標は、積分を「何となく面積を求める操作」としてではなく、微分と結びついた計算の道具として扱えるようになることである。

1. 不定積分と積分定数の意味を説明できる。
2. 基本的な不定積分を微分で確認できる。
3. 定積分を原始関数の差として計算できる。
4. 置換積分・部分積分の公式を適切に使える。

1. 基本：不定積分

Section content

1. 基本：不定積分
2. 基本：定積分
3. 基本：置換積分
4. 基本：部分積分
5. 自習用拡張内容

不定積分：微分の逆操作

関数 $f(x)$ に対し、

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を、 $f(x)$ の不定積分または原始関数という。

$$F(x) = \int f(x) dx$$

と書く。

読み方

$\int f(x) dx$ は「 $f(x)$ を x で積分する」と読む。
 dx は、どの変数で積分するかを示している。

積分定数：原始関数はいつではない

$F'(x) = f(x)$ なら、任意の定数 C に対して

$$\frac{d}{dx}\{F(x) + C\} = F'(x) = f(x)$$

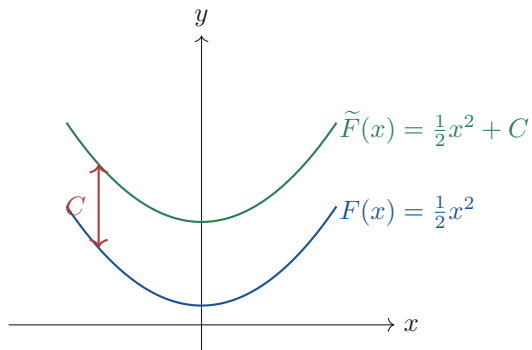
である．したがって、 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である．

不定積分の書き方

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

C を**積分定数**という．不定積分では $+C$ を忘れない．

積分定数の図形的意味



ポイント

同じ関数を微分して得られる原始関数どうしは，上下方向に平行移動したものになる．

基本公式：まずは微分から確認する

微分前	$\xrightarrow{\frac{d}{dx}}$	微分後
$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$		$x^a \quad (a \neq -1)$
$\log x $		$\frac{1}{x}$
e^x		e^x
$-\cos x$		$\sin x$
$\sin x$		$\cos x$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x}$

積分公式

上の表を右から左に読むと，不定積分の公式になる．

基本的な不定積分の一覧

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^a \ (a \neq -1)$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$

注意

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ は $a = -1$ では使えない。
 $a = -1$ の場合は $\int x^{-1} dx = \log |x| + C$ である。

例：公式を使った不定積分

例 1

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$$

例 2

$c > 0, c \neq 1$ とする.

$$c^x = e^{x \log c}$$

より

$$\frac{d}{dx} c^x = (\log c) c^x.$$

したがって

$$\int c^x \, dx = \frac{c^x}{\log c} + C.$$

2. 基本：定積分

Section content

1. 基本：不定積分
2. 基本：定積分
3. 基本：置換積分
4. 基本：部分積分
5. 自習用拡張内容

定積分：原始関数の差

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．このとき

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

と定める．

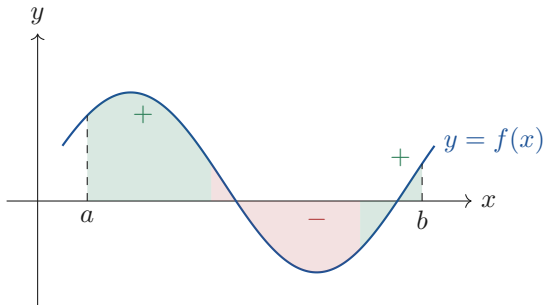
記法：下記のように書くことも多い

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

例

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

定積分の意味：符号付き面積



符号付き面積

x 軸より上の部分は正，下の部分は負として足し合わせる。
したがって，定積分は常に通常の面積と同じとは限らない。

定積分の約束

定積分では、向きを含めて次の約束をする。

区間の向き

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

特に

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

例

$$\int_2^0 x^2 \, dx = - \int_0^2 x^2 \, dx = -\frac{8}{3}.$$

定積分から原始関数を作る

定数 c を固定して

$$\tilde{F}(x) = \int_c^x f(t) \, dt$$

とおく． F を f の原始関数とすると，定積分の定義から

$$\tilde{F}(x) = F(x) - F(c).$$

$F(c)$ は x によらない定数なので

$$\frac{d}{dx} \tilde{F}(x) = F'(x) = f(x).$$

ポイント

上端を変数にした定積分は，原始関数を作る．

これは微積分学の基本定理につながる考え方である．

積分の分割と線形性

分割

$a < c < b$ のとき

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

線形性

定数 α, β に対して

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} \, dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx. \end{aligned}$$

使い方

複雑な積分を、計算しやすい部分に分けてよい。

3. 基本：置換積分

Section content

1. 基本：不定積分
2. 基本：定積分
3. 基本：置換積分
4. 基本：部分積分
5. 自習用拡張内容

置換積分：変数を取り替える

$x = x(t)$ とおく． $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ のとき，

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \frac{dx}{dt} \, dt$$

が成り立つ．

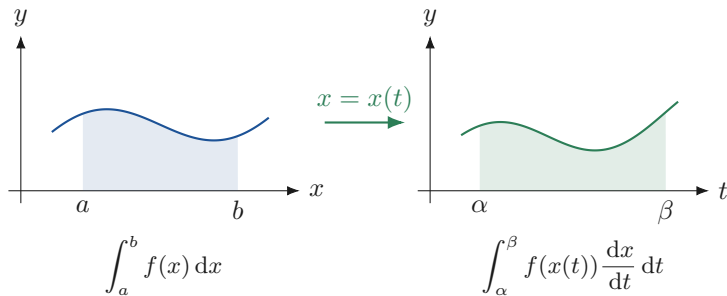
なぜ $\frac{dx}{dt}$ が必要か

t の微小変化 Δt に対して

$$\Delta x \simeq \frac{dx}{dt} \Delta t.$$

横幅が変わるので，面積を合わせるために $\frac{dx}{dt}$ が掛かる．

置換積分のイメージ



大事な手順

置換したら、被積分関数だけでなく、 dx と積分区間も一緒に変換する。

例： $\int_a^b c^x \, dx$

$c > 0, c \neq 1$ とする． $t = x \log c$ とおくと， $c^x = e^t$ であり

$$x = \frac{t}{\log c}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\log c}.$$

積分区間は

$$x = a \Rightarrow t = a \log c,$$

$$x = b \Rightarrow t = b \log c.$$

したがって

$$\int_a^b c^x \, dx = \int_{a \log c}^{b \log c} e^t \frac{1}{\log c} \, dt = \frac{c^b - c^a}{\log c}.$$

例： $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$

$u = \cos x$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad \sin x \, dx = -du.$$

積分区間は

$$x = 0 \Rightarrow u = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0.$$

よって

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx = -\int_1^0 u^2 \, du = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}.$$

注意

置換後に積分区間の向きが逆になることがある．符号を丁寧に扱う．

4. 基本：部分積分

Section content

1. 基本：不定積分
2. 基本：定積分
3. 基本：置換積分
4. **基本：部分積分**
5. 自習用拡張内容

部分積分：積の微分公式から作る

積の微分公式

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を積分すると

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

定積分の場合

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

部分積分で考えること

部分積分では、被積分関数を

$$f(x)g'(x)$$

と見る．このとき

- $f(x)$ は微分される．
- $g'(x)$ は積分されて $g(x)$ になる．

方針

微分すると簡単になるものを $f(x)$ に選ぶと、計算しやすいことが多い．

典型例

xe^{2x} では、 x は微分すると 1 になるので、 $f(x) = x$ と見るのが自然である．

例： $\int_0^1 x e^{2x} \, dx$

$f(x) = x, g'(x) = e^{2x}$ とおくと

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

部分積分より

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} \, dx &= \left[x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

例：同じ積分が再び現れる場合

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$$

とおく． $f(x) = \cos^2 x$, $g'(x) = \sin x$ と見ると

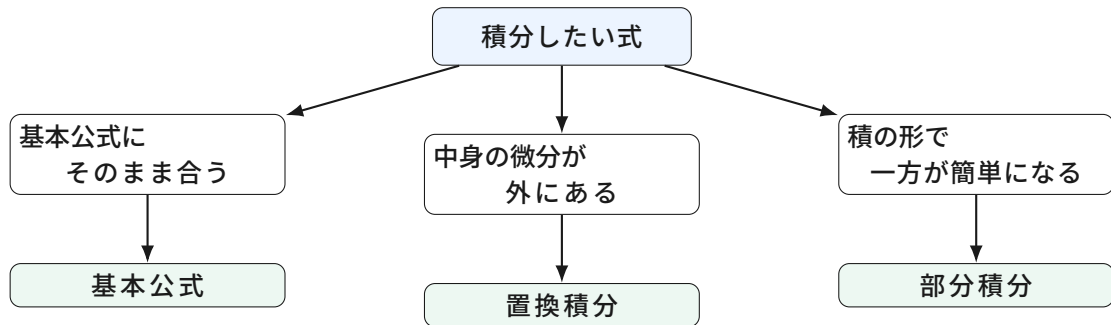
$$f'(x) = -2 \cos x \sin x, \quad g(x) = -\cos x.$$

部分積分より

$$\begin{aligned} I &= \left[-\cos^3 x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-2 \cos x \sin x)(-\cos x) \, dx \\ &= 1 - 2I. \end{aligned}$$

したがって $3I = 1$ ，つまり $I = 1/3$ である．

どの方法を使うか



45 分講義のまとめ

不定積分

$$F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

定積分

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

計算技法

$$\int_a^b f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt, \quad \int_a^b f g' dx = [fg]_a^b - \int_a^b f' g dx.$$

5. 自習用拡張内容

Section content

1. 基本：不定積分
2. 基本：定積分
3. 基本：置換積分
4. 基本：部分積分
5. 自習用擴張內容

ここからは自習用拡張内容

ここまでの基本内容で，授業内の計算練習には十分対応できる．

自習で確認する内容

- 逆三角関数を使う積分公式
- $\sqrt{a^2 - x^2}$ や $\sqrt{x^2 + a}$ を含む公式
- 候補を微分して公式を確認する方法

これらは，基本公式を増やすだけでなく，公式がどのように作られるかを理解するためにも有用である．

自習：逆三角関数を含む公式

$a > 0$ とする.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

確認方法

右辺を微分して，左辺の被積分関数に戻ることを確認する．

自習： $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ の確認

$$y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

とおく．すると

$$ay = \arctan \frac{x}{a}, \quad \tan(ay) = \frac{x}{a}.$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{a}{\cos^2(ay)} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}.$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2} \cos^2(ay) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \tan^2(ay)} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

自習：円の上半分に関する積分

$a > 0$ とすると

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

は半径 a の円 $x^2 + y^2 = a^2$ の上半分を表す．

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

見方

この公式は，部分積分を使って導ける．円の面積計算にもつながる公式である．

自習：同じ積分が現れる導出

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot 1 \, dx.$$

部分積分を用いると

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx. \end{aligned}$$

よって

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

自習：平方根が分母にある公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

候補

$$F(x) = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$$

を微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}. \end{aligned}$$

ポイント

公式を丸暗記するだけでなく，微分して確認できるようにする．

自習用練習問題

次を求めよ．必要なら，右辺を微分して答えを確認せよ．

1. $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

3. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

目標

公式を使うだけでなく，どの公式のどの文字が今の問題に対応しているかを説明する．

Part I

Appendix



6. 自宅演習 (40 分程度)

7. 解答例

6. 自宅演習 (40 分程度)

6. 自宅演習 (40 分程度)

7. 解答例

自宅演習の進め方

- まずは自力で方針を立てる.
- 途中式を書く. 特に置換積分では, dx と積分区間を必ず変換する.
- 答えは微分して確認できるものが多い.

目安

前半 20 分で基本問題, 後半 20 分で置換積分・部分積分を解く.

演習 1：基本公式

次を求めよ．

1. $\int (3x^2 - 4x + 1) \, dx$

2. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \, dx$

3. $\int_0^1 (2x + e^x) \, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$

確認

不定積分では $+C$ ，定積分では端点代入を忘れない．

演習 2：置換積分

次を求めよ．

1. $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$

2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx$

3. $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$

4. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

ヒント

$u = x^2$, $u = \sin x$, $u = \log x$, $u = 1 + x^2$ などを考える．

演習 3：部分積分

次を求めよ．

1. $\int_0^1 x e^x \, dx$

2. $\int x \cos x \, dx$

3. $\int_1^e \log x \, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

ヒント

x や $\log x$ は、微分すると簡単になる．

演習 4：方法を選ぶ

次を求めよ．どの方法を使うかも書くこと．

1. $\int_0^1 (x+1)^5 dx$

2. $\int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$

3. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx$

考え方

「公式」「置換」「部分積分」のどれを使うと計算量が少ないかを比較する．

7. 解答例

Section content

6. 自宅演習 (40 分程度)

7. 解答例

解答例：演習 1

$$1. \int (3x^2 - 4x + 1) \, dx = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

$$2. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + \log |x| + C.$$

$$3. \int_0^1 (2x + e^x) \, dx = [x^2 + e^x]_0^1 = e.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

解答例：演習 2

1. $u = x^2$ とおくと $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^u du = e - 1.$

2. $u = \sin x$ とおくと $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4}.$

3. $u = \log x$ とおくと $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}.$

4. $u = 1 + x^2$ とおくと $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \log 2.$

解答例：演習 3

$$1. \int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1.$$

$$2. \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$3. \int_1^e \log x \, dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = e - (e - 1) = 1.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1.$$

解答例：演習 4

1. $u = x + 1$ とおくと $\int_0^1 (x + 1)^5 dx = \int_1^2 u^5 du = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}.$

2. $u = 1 + x^2$ とおくと $\int_0^1 x(1 + x^2)^4 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 u^4 du = \frac{31}{10}.$

3. 部分積分を 2 回用いると $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$

4. $u = \cos x$ とおくと $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx = \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}.$