§2-4. Taylor展開（すごく重要!!）

Th. Taylorの定理.　関数 $f(x)$ が開区間 I で n 階微分可能で、$a, x \in I$ とすると、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n}_{\text{この項を } R_n \text{ と書くコトもある.}}$$

が a と x の間の $^\exists c$ に対して成り立つ.

- この右辺を $f(x)$ の a における Taylor展開と言う.
- $a=0$ の時、マクローリンの定理と言ったりする.

c が分からないので、$f^{(n)}(c)$ は求まらず、「ほぼ」としか言えない.

注　f の x での値 $f(x)$ を、$f(a), f'(a), f''(a), \cdots$ をもとに ほぼ 計算できるよ!! という定理.

注　Taylor展開は、上の R_n がとても小さい≃無視できる という状況で利用するコトを狙うものである.

(例. 指数函数)

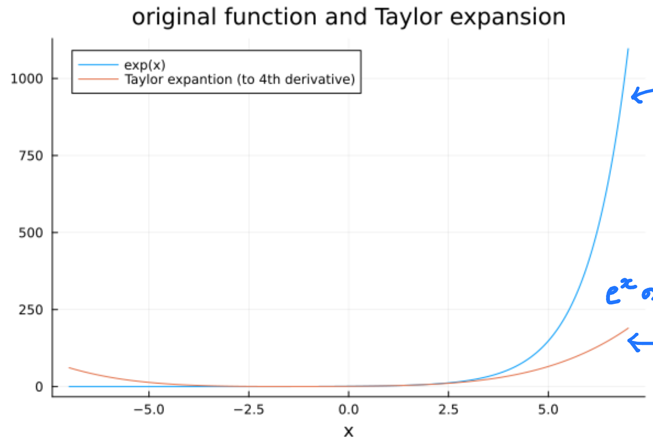
e^x の 0 における Taylor 展開は, $^\forall n \geq 1$ に対して,

以前でてきた式 $\exp(x) \overset{\text{def}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ と合致している!

この α は x を決めると決まり, かつ, x によって異なる.

- $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k e^x \right) \Big|_{x=0} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (x-0)^k + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\alpha x} \cdot x^n}{n!}$, ただし $0 < \alpha < 1$.

Taylor 展開がどれくらい近似しているか? を見る例



$y = e^x$

e^x の Taylor 展開の 4次まで採用した式 $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

$x \simeq 0$ では かなり近い!!

x が 0 から離れると ズレが大きくなる.

(その他の例)

- 三角函数 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{(-ix)^k}{k!} \right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(ix)^k}{k!} - \frac{(-ix)^k}{k!} \right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

- 対数函数 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, ただし, $|x| < 1$.

- 二項展開 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots$

応用 例1 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$

例2 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ただし $|x| < 1$.

(収束の速さの程度を示す記号)

- ランダウの記号：$\overset{\text{スモールオー}}{o}$ と $\overset{\text{ラージオー}}{O}$.

$$\begin{cases} x\to a \text{ で } f(x) = o(g(x)) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ \quad〃 \quad f(x) = O(g(x)) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \overset{\text{有限な値}}{C} \end{cases}$$

→ $x\to a$ で f の方が g よりも速く 0 に近づくコトを意味する。

→ $x\to a$ で f と g が同じ速さで収束するコト 〃 .

(注) $\overset{\text{ラージオー}}{O}$ の方が多くの情報を持っているので、なるべくこちらを使った方が良い。

(例) $x\to 0$ で $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\begin{cases} \overset{\text{スモールオー}}{o}(x^{n-1}) \\ \overset{\text{ラージオー}}{O}(x^n) \end{cases}}$

→ $\overset{\text{スモールオー}}{o}(x^{n-1})$ は、$\overset{R_n}{x^n}$ は x^{n-1} よりも速く $\overset{x\to 0\text{で}}{0}$ に近づくコトを示している。

→ $\overset{\text{ラージオー}}{O}(x^n)$ は $R_n \sim x^n$ は $x\to 0$ で x^n と同じ速さで収束するコトを示している。

$$= R_n = e^{\alpha x} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ただし、} 0 < \overset{\exists}{\alpha} < 1.$$