§2.3 高次(高階)の導関数

$f^{(2)}(x)$ や、$f''(x)$ と書いたりもする。

$y=f(x)$ の導関数 $\overset{=f'(x)}{\dfrac{df}{dx}}$ がさらに微分可能な時、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ を f の2階導関数と言う。このくり返しで n 階導関数を定義する。

def. 関数 $f(x)$ が C^n 級である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)$ が n 階微分可能で、$f^{(n)}(x)$ が連続。

注) 応用上は、単に微分可能かどうかよりも、微分後も連続かどうかが重要なことも多く、この C^n 級という概念は重要である。

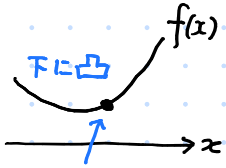
高階微分の応用例

- 関数の凹凸

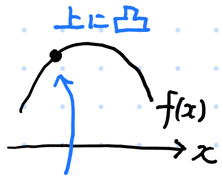
2階微分 f'' の符号でその関数の凹凸が分かる。

↓

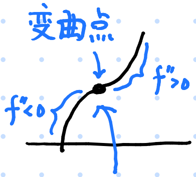
極値の性質や、増減表に役に立つよ。



$f''>0$



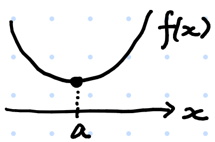
$f''<0$

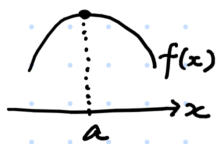


$f''=0$

注) 変曲点 $\Rightarrow f''=0$ だが、$f''=0 \Rightarrow$ 変曲点 とは言えないコトに注意。

- 関数の極大 or 極小点を探す手がかりに。←「本当は最大 or 最小点を知りたいが困難」というシーンで、代わりに使われること多し!!
(Th. 2.3.2)





$\left.\begin{array}{c} f''(a)>0 \\ \& \\ f'(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ f は $x=a$ で 極小

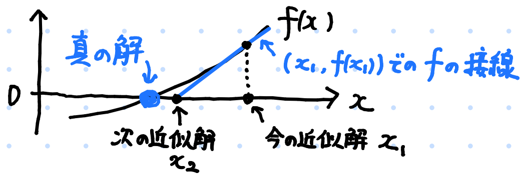
$\left.\begin{array}{c} f''(a)<0 \\ \& \\ f'(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ f は $x=a$ で 極大

(応用例の続き)

教p.44の例題2.3.1を見てみよう.

この手法の性能解析や一般化に高階微分が登場する.

- Newton法 〜 $f(x)=0$ の解の近似値をどんどん改善できる… かもしれない手法.



左の図から分かるように, 今持っている近似値 x_1 に対して,
$(x_1, f(x_1))$ を通る f の接線が $y=0$ と交わる点の x を x_2 とすると,
x_2 は x_1 よりも $f(x)=0$ の真の解に近いと期待できる.

よって

x_2はこの連立eq.を満たすx

$$\begin{cases} \text{接線の式} & y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \\ y=0\text{の式} & y=0 \end{cases} \to -f(x_1)=f'(x_1)(x_2-x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$ で計算すると, x_2はx_1よりも解に近いのでは?

あとはこのくり返し. つまり, $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \ x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}, \cdots$ と, 満足するまで計算を進める.

多くの場合は,「$|f(x_k)|$ が充分小さくなるまで」とする.

(函数の積 fg の高階微分に使える公式)

- ライプニッツの公式: n階微分可能な函数 $f(x), g(x)$ に対し,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad /\!/$$

→ 注. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = {}_nC_k$.

例. $$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (fg) = \binom{2}{0} fg'' + \binom{2}{1} f'g' + \binom{2}{2} f''g = fg'' + 2f'g' + f''g$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}(fg)\right) = \frac{d}{dx}(fg' + f'g) = (fg'' + f'g') + (f'g' + f''g) = fg'' + 2f'g' + f''g$$

(上の公式を用いない計算)