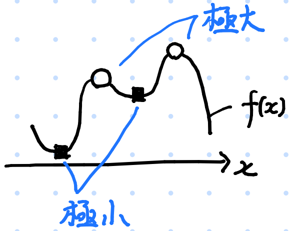
§2.2 微分を用いた、簡単で便利な定理（平均値の定理など）

（概念）極値.



"aに十分近いx（$x \neq a$）では $f(x)<f(a)$" と言っている.

$f(x)$ が $x=a$ で極大 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $f(x)<f(a)$ for $^\forall x \in I$ ($x \neq a$), $^\exists I$ s.t. $a \in I$.

（極小も同様）

- この時の値を極大値という.
- 極大値と極小値を合わせて極値と言う.
- 極大な点は最大な点の候補.（極小は最小の…）

（極値では微分はゼロ）

Th. $f(x)$ が $x=a$ で極値をもつ $\Rightarrow$ $f'(a)=0$.

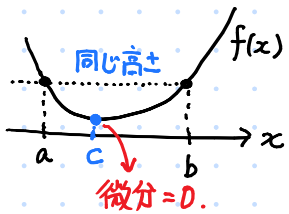
注 ただし、
- 極大 $\Rightarrow f'(a)=0$
- 極小 $\Rightarrow f'(a)=0$
- 極値でなくとも… $\Rightarrow f'(a)=0$

なので、この Th. の逆である「$f'(a)=0 \Rightarrow f$ が $x=a$ で極値」は成立しない!!

（同じ高さの点の間に、微分ゼロの点が必ずある）

Th. ロルの定理 (Rolle)

関数 $f(x)$ が
$$\left\{\begin{array}{c} [a,b] \text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b) \text{で微分可能} \\ \text{かつ} \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow a<{}^\exists c<b \text{ s.t. } f'(c)=0.$$

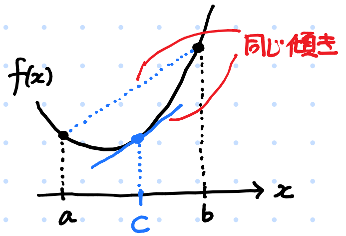


注 ロルの定理は平均値の定理で $f(a)=f(b)$ とした場合に相当する.

すぐ後に登場する

(離れた2点間の平均傾きと同じ微分値を持つ点がその2点の間に必ずある)

Th. 平均値の定理. 関数 $f(x)$ が $\left\{\begin{array}{l}[a,b] \text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b) \text{で微分可能}\end{array}\right\} \Rightarrow a < {}^{\exists}c < b$ s.t. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



注 平均値の定理は Cauchy の平均値の定理で $g(x)=x$ とした場合に相当する.

(上の定理の拡張版)

Th. Cauchy の平均値の定理. 関数 $f(x), g(x)$ が $\left\{\begin{array}{l}[a,b] \text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b) \text{で微分可能} \\ \text{かつ} \\ g(a) \neq g(b) \\ \text{かつ} \\ f', g' \text{は同時には}0\text{にならない}\end{array}\right\} \Rightarrow a < {}^{\exists}c < b$ s.t. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

($\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ の形になる時の計算を、微分でなんとかする!!)

Th. ロピタルの定理. 関数 $f(x), g(x)$ は $x=a$ の近くで微分可能とする.

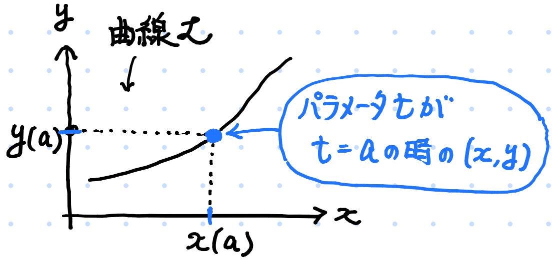
$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \text{かつ} \\ \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{が存在する}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ の形になって困る時でも、

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'}{g'}$ を計算して値が求まるならば それが答!! という、ありがたい定理.

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ は、$\dfrac{0}{0}$ の形になるので困るが、ロピタルを用いると、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$ となり、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ と分かる.

(パラメータ表記された曲線の微分)



これを「曲線Cのパラメータtによる表示」という。

座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のコト。

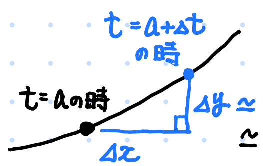
連続な函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を使って、平面上の連続な曲線C上の点が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ と表わされる時、

$$\left\{ \begin{array}{l} f, g \text{ が微分可能，かつ} \\ f', g' \text{ が連続，かつ} \\ \quad f'(a) \neq 0 \end{array} \right\}$$

であるならば、 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=f(a)} = \dfrac{g'(a)}{f'(a)}$.

① 図で納得.

拡大



$\Delta y \simeq g(a+\Delta t) - g(a)$
$\simeq g'(a) \cdot \Delta t$

$\Delta x \simeq f(a+\Delta t) - f(a)$
$\simeq f'(a) \cdot \Delta t$

$\to$ より、 $\dfrac{dy}{dx} \simeq \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \simeq \dfrac{g'(a)\Delta t}{f'(a)\Delta t} = \dfrac{g'(a)}{f'(a)}$

② 式変形で納得.

$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$ なので、 $t = f^{-1}(x)$ を利用して $y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = g \circ f^{-1}(x)$.

合成 $g \circ f^{-1}$ に対する微分

よって、 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=f(t)} = \dfrac{d\, g(f^{-1}(x))}{dx} = \dfrac{d\, g(t)}{dt} \cdot \dfrac{d f^{-1}}{dx} = g'(t) \cdot \dfrac{1}{\frac{df}{dt}} = \left.\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}$ として理解できる.

$t = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(t) = x$ で、
逆函数の微分 $\dfrac{d f^{-1}}{dx} = \dfrac{1}{\frac{df}{dt}}$ を使って