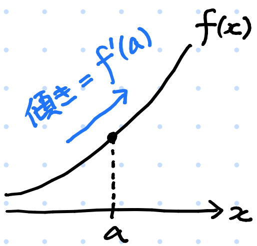
§2.1 関数の微分 ～ 極限を用いるコトで、変化の勢いを定義でき、計算も可能に！

← これが微分の本質.

(定義&表記)

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x=a$ で微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の値が存在する.



微分 f' とは、
f の変化の勢い、
即ち、f の傾きのコト。

① この極限値を f の $x=a$ での微分値とか微分係数と言い、
$f'(a)$ と書く。

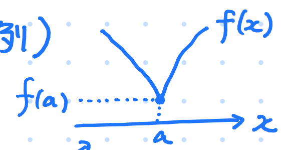
② $^\forall x\in$ 区間 I で微分可能なとき、
$f'(x)$ for $x\in I$ を $f(x)$ の導函数と言う。

注) f' の代わりに $\dfrac{df}{dx}$ と書いたりもする.

注) $x\to a$ で 分母 $\to 0$ なので、このlimit値が存在するなら
分子も $\to 0$ となる必要がある. つまり、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となり、
f が $x=a$ で微分可能 $\Rightarrow$ f が $x=a$ で連続
というコトを意味している.（教科書 Th 2.1.1）

注) 逆は成り立たない. つまり、
f が $x=a$ で連続であっても、
f が $x=a$ で微分可能とは限らない.

実例)



この時、f は $x=a$ で
連続だが微分不可.

(微分の簡単な計算)

Th 2.1.3 函数 f, g が $x=a$ で微分可能ならば cf, $f\pm g$, fg, f/g のいずれも $x=a$ で微分可能で、（$c\in\mathbb{R}$ は定数として.）

$$\begin{cases} 1.\ (cf)'=c\cdot f', \quad 2.\ (f\pm g)'=f'\pm g', \\ 3.\ (fg)'=f'g+fg', \\ 4.\ (f/g)'=(f'g-fg')/g^2. \end{cases}$$
← ただし、$g(a)\neq 0$ とする.

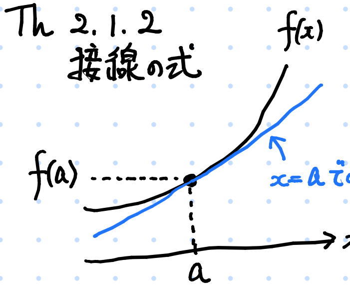
4. も同様に確かめてみよう!!

3. を確かめてみる.

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}\right)\left\{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)\right\} \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)g(x) + \lim_{x\to a}f(a)\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(微分を使うと、接線の式を計算で求められる)

Th 2.1.2 接線の式

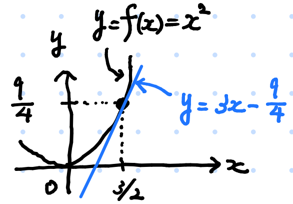


$x=a$ でのfの接線.

$\begin{cases} \text{傾き} = f'(a) \text{ で,} \\ (a, f(a)) \text{ を通る} \end{cases}$ → この2つの条件から この接線の式は

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

と定まる.



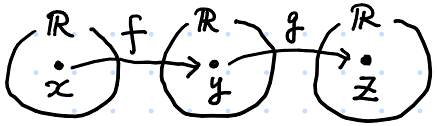
例 $f(x)=x^2$ に対し, $x=\frac{3}{2}$ での接線は, $\begin{cases} f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} \\ f'(\frac{3}{2}) = 3 \end{cases}$ より,

$$y-\frac{9}{4} = 3\left(x-\frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow y = 3x - 9/4 \quad //.$$

(合成函数の微分)

入力が x の函数となる.

Th. 2.1.4 函数 $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し、その合成 $g\circ f$ を考える.



$z = g(f(x)) = g\circ f(x)$

記号が分かり易いように $y=f(x)$, $z=g(y)$ とすると $z(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x))$ に対して、

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'(y)\cdot y'(x)$ である. f, g で書くと、$\frac{dz}{dx} = \frac{d(g\circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy}\cdot\frac{df}{dx} = g'(y)\cdot f'(x)$ である.

確かめてみるとこんな感じ.

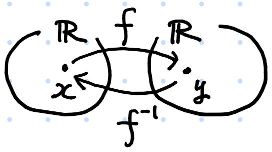
$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_a = \lim_{x\to a}\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{f(x)\to f(a)}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)\cdot f'(a)$$
$$(b = f(a))$$

例 $\frac{d}{dx}((\cos x)^2)$ は, $\begin{cases} y = \cos x, \\ z = y^2 \end{cases}$ として、$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'(y)\cdot y'(x)$ を計算すれば良いので、

$$= z'(y)\cdot y'(x) = 2y\cdot(-\sin x) = 2\cos x\cdot(-\sin x) = -2\sin x\cdot\cos x \quad //.$$

(逆函数も微分できる)

Th 2.1.5 逆函数の微分. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x=a$ で微分可能で、$f'(a)\neq 0$ とする。すると $f'(a)$ に十分近い y において f の逆函数 f^{-1} が存在する.



この f^{-1} は $y=f(a)$ で微分可能で、その時 $f^{-1}(y)$ に対して

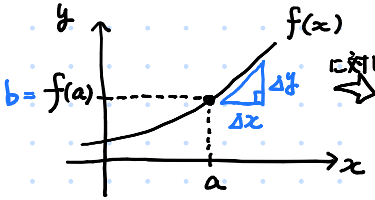
$$\frac{d(f^{-1})}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$$

である.

- $f'(a)$ が存在するので f は $x=a$ で連続.
- $f'(a)\neq 0$ なので、a に十分近い x 上で $f(x)$ は単調.

$\Rightarrow$ f^{-1} が存在. という仕組み.

① 図で納得 (重要な視点)



に対して $\Rightarrow$
$$\begin{cases} f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \\ (f^{-1})'(b) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}. \end{cases}$$

つまり、$f'(a)$ と $(f^{-1})'(b)$ は $b=f(a)$ として逆数の関係にある.
(掛けて1になる)

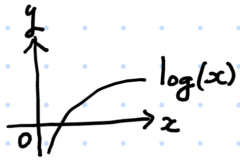
② 式で納得.

$$\left.\frac{d(f^{-1})}{dy}\right|_{y=f(a)} = \lim_{y\to f(a)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(a))}{y-f(a)} = \lim_{y\to f(a)}\frac{x-a}{y-f(a)}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \left.\frac{1}{f'(a)}\right|_{a=f^{-1}(y)}$$

↑ $f^{-1}(y)$ を y で微分している (説明の都合上)

↓ $f^{-1}(x)$ を x で微分している.

例1



の微分を、log が exp の逆函数であるコトを用いて計算してみる.

$f(x) := \exp(x)$ と、$f^{-1}(x) := \log(x)$ に対し、(上の視点の図で) $x=a$, $y=b=\exp(a)$ に対して、

$f'(a)=\exp(a)$ なので、$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\exp(a)}$ ← $f'(a)$ の逆数なので.

$b=\exp(a)$ なので → $= \frac{1}{b}$. つまり、$\left.\frac{d\log(y)}{dy}\right|_{y=b} = \frac{1}{b}$ なので、$(\log(x))' = \frac{1}{x}$. //

(代わりに、シンプルで分かり易い計算) → 実は、これだけ覚えれば十分…

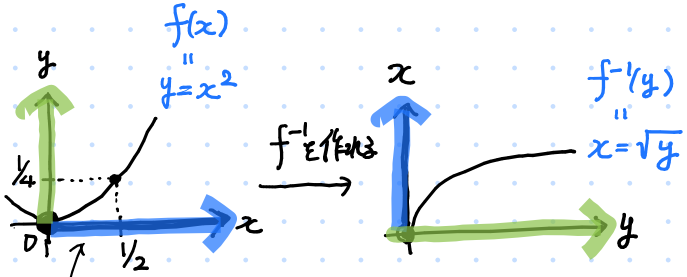
$y=\log(x) \Leftrightarrow \underbrace{\exp(y)=x}$ なので、x で微分して

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{d\exp(y)}{dx} & = & \frac{dx}{dx} \\ \| & & \| \\ \exp(y)\cdot\frac{dy}{dx} & & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \ //$$

(さらなる例を…)

例2

$f(x)=x^2$ の逆函数に対して



xを$(0,\infty)$に制限すると、

→ この時、
$$\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}\left(=\frac{d\sqrt{y}}{dy}\right)=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}},$$
← yの函数に変形しないといけないコトに注意。

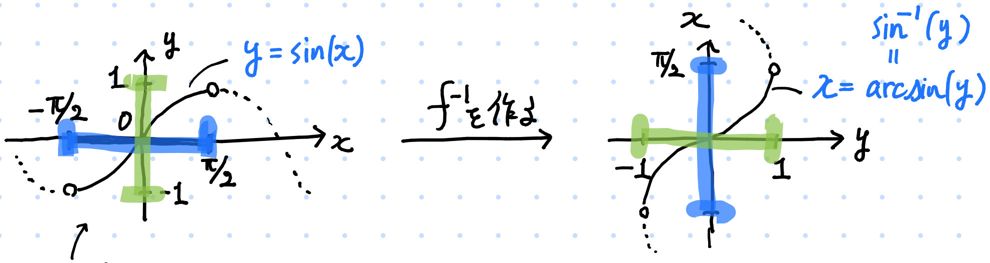
ただし、$y>0$.

単に記号を変えて

よって、
$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}},$$
ただし、$x>0$.

例3

$f(x)=\sin(x)$ の逆函数に対して



xを$(-\pi/2,\pi/2)$に制限して、

に対して、
$$\frac{d\sin^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{d\sin(x)}{dx}}=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$
ただし、$-1<y<1$.

この変形の符号には要注意!! この時は $\frac{df^{-1}}{dy}$ が ずっと正 なのでこうなる。

よって、
$$\frac{d\sin^{-1}(x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
ただし、$-1<x<1$. //

この§2-1の内容は、少し練習すればすぐできるようになる。→ 教p.30の内容や、教p.31の問を解いてみよう。