§1-3. 初等函数 ～ 扱い易くてシンプルな函数を知っておこう。

この def. がなぜか教科書にのってない…

def. 初等函数とは、

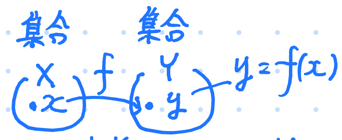
定数函数 $y=c\ (\in\mathbb{R})$, 1次函数 $y=x$, 指数函数 $y=e^x$, 正弦函数 $y=\sin(x)$

を基本とし、これらの間で

1. 和, 差, 積, 商　　2. 合成函数　　3. 逆函数 ― このあとすぐ学ぶ。

を作る操作を有限回組み合わせて得られるモノ。

函数 f を



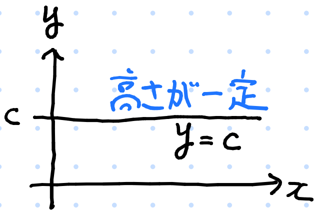
ととらえる時の X を定義域, Y を値域とよぶのだ。

注）初等函数は、その定義域のほとんどすべての点で微分可能である。

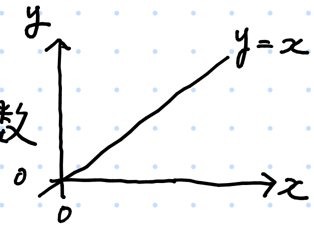
§2-1で学ぶ。先に知っておくと便利なのでココで書いた。

（一応）

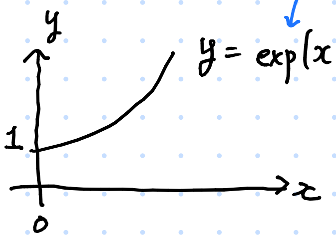
定数函数



一次函数



指数函数



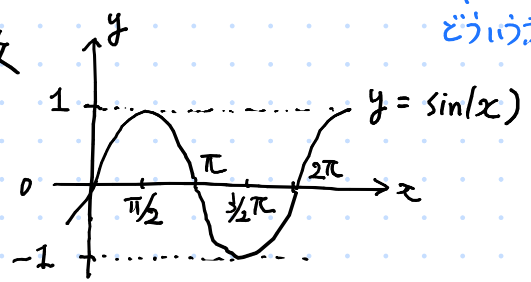
$$y=\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \left(=e^x\right)$$

指数函数の表記

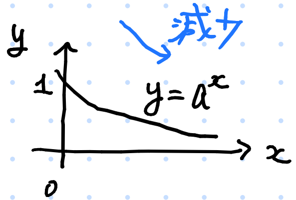
e の x 乗. e はネイピア数.

$x\in\mathbb{R}$ の時は $\exp(x)=e^x$ だが、$x\notin\mathbb{R}$ の時は $\exp(x)$ は e^x では無かったりする。例えば行列 A に対して $\exp(A)$ は定義できるが、e^A はどういう意味になるかから考えないと…

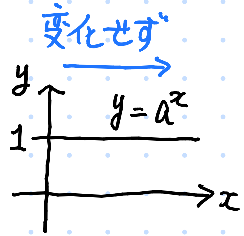
正弦函数



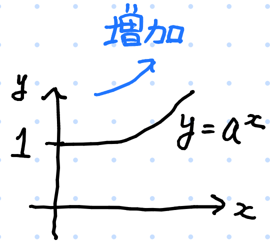
注）一般に、$a>0$ に対して a^x も指数函数とよぶコトがある。その時、$0<a<1$, $a=1$, $1<a$ の3通りで挙動が下図のように異なる。



$0<a<1$ の場合

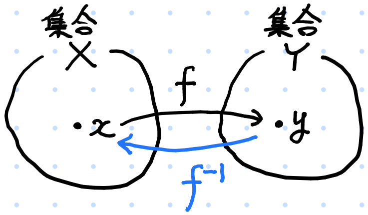


$a=1$ の場合



$1<a$ の場合

逆函数



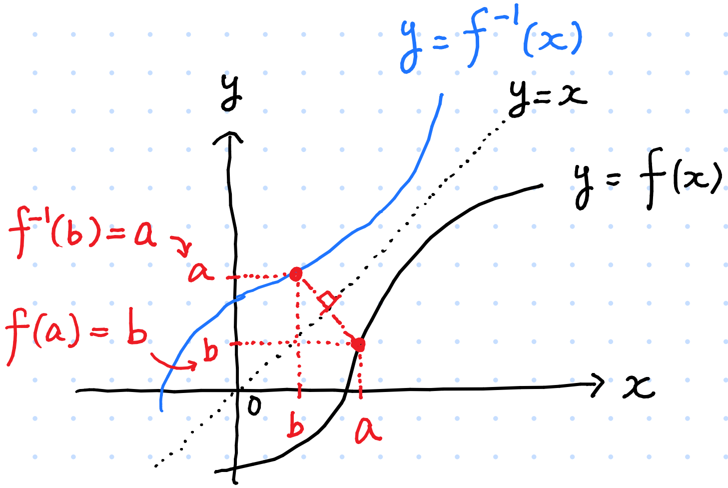
$Y=\{y=f(x),\ x\in X\}$ （$x\in X$ に対して $y=f(x)$ を全部集めたもの）

函数 $f(x)$ が $x\in X$ で定義されている時、$Y=f(X)$ に対し
$y\in Y$ に対して定義される函数 $g(y)$ が存在して

$$\begin{cases} ①\ X=g(Y)\ \text{である。} \\ ②\ y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y) \end{cases}$$

の2つの条件を満たす時、g を f の逆函数と言い、$g=f^{-1}$ と書いたりする。

ポイント!!
注 逆函数は、元の函数を $y=x$ を基に鏡映しにした形状になる。



[$f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$ なので、
$f(x)$ 曲線が (a,b) を通る $\Rightarrow$ 逆函数 $f^{-1}(x)$ 曲線が (b,a) を通る。]

というコトを、左の図に合わせて考えると分かるハズ。

$A \Rightarrow B$ は A ならば B と読む。

函数の単調性： 函数 $f(x)$ に対し、 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ の時、f は単調増加する と言う。 単調減少も同様。

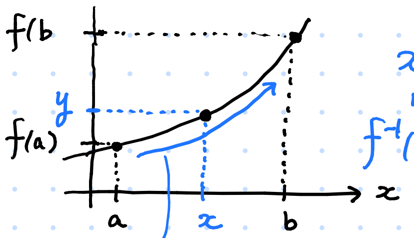
注） $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ の時は 広義の単調増加 だ。 （狭義の）

なお、「$x \in I$（区間）に限定して」のように限定された条件下でもこの概念は使える。

注 $\min(\alpha, \beta)$ を $\alpha \wedge \beta$、$\max(\alpha, \beta)$ を $\alpha \vee \beta$ と書くコトがある。
慣れると便利だ。

Th.（連続で単調なら逆がある）

区間 $[a, b]$ で函数 $f(x)$ が連続 かつ 単調 ならば、区間 $[\min(f(a), f(b)), \max(\,''\,)]$ で定義される逆函数 f^{-1} が存在して連続である。//



$x \xrightarrow{f} f(x)$

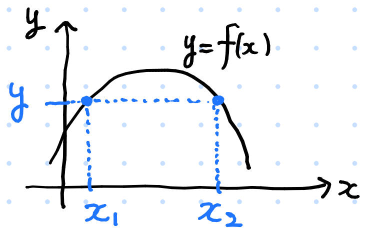
$f^{-1}(y) \xleftarrow{f^{-1}} y$

（$x = f^{-1}(y)$, $f(x) = y$）← の関係が シンプルに成り立つ。

左の図からほぼ自明。

この連続性と単調性がポイント。

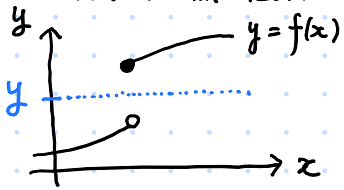
注） 単調性が無いために f^{-1} が存在しないケース



「函数の（出力）値は1つのみ」という制限下でのお話。この制限を外した「多価函数」というものもあるが、しばらくは扱わない。

異なる x である $x_1 \neq x_2$ に対し $y = f(x_1) = f(x_2)$ であるため、
この y に対して $f^{-1}(y)$ の値を1つに定めることができず、
f^{-1} を定義できない。

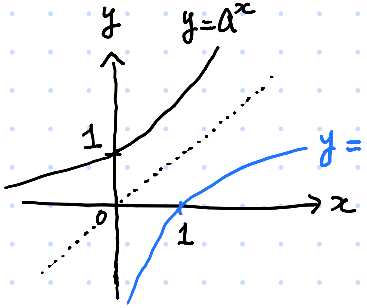
注） 連続性が無いために f^{-1} が存在しないケース



上図の y に対し、$y = f(x)$ となる x がそもそも存在しない。
よって、この y に対し $f^{-1}(y)$ を定義できない。

(いくつかの初等函数)

指数函数と対数函数: #1-3-1に書いたように、$0<a,\ a\neq 1$ に対して指数函数 $y=a^x$ は $(-\infty,\infty)$ で連続かつ単調である。よって逆函数を持つ。
これを対数函数と言い、$x=\log_a y$ と書く(この時、aを底と言う)



指数函数と対数函数
(1<a の場合の図)

わかり易く書くと、
$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$ というコトである。($\xrightarrow{\text{だから、}}$ $\begin{cases} x=\log_a(a^x), \\ y=a^{\log_a y} \end{cases}$ が成り立つ.)

対数函数の性質をいくつか… ($0<a,\ a\neq 1,\ x,y\in\mathbb{R}$ として)

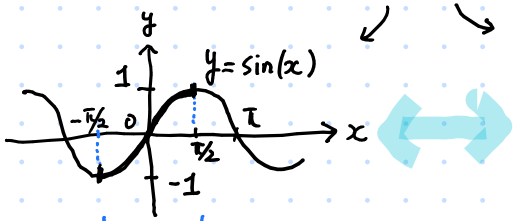
1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
2. $\log_a(x^b)=b\log_a x$ for $^\forall b\in\mathbb{R}$
3. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ for $0<b,\ b\neq 1$.

Challenge! 自分で確認してみよう.
微分計算でけっこう用いるゾ。

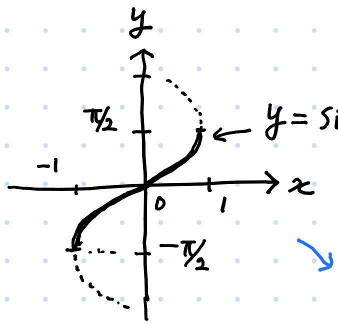
なお、$\log_e x$ を特別に自然対数と呼び、$\ln x$ と書いたりする。

三角函数と逆三角函数: 三角函数 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ はごく一部を除いて連続だが、周期的函数なので $(-\infty,\infty)$ でみると単調ではない。
$\tan(x)$ に対する $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\underset{}{\overset{\text{整数}}{\mathbb{Z}}}$ のコト.
そこで x を制限し、その条件下で逆函数を考える。

正弦函数 ($\sin(x)$) と 逆 〃



「xをここに制限して単調性を確保して」が前提。
xをどこに制限するかは実は変更可能。
xを $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限するのが $\sin^{-1}$ を考える時の標準.



← $y=\sin^{-1}(x)$ (= $\mathrm{Arcsin}(x)$ と書いたりする)

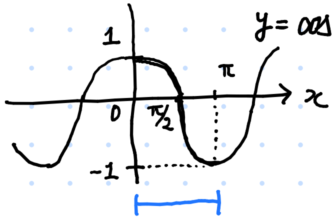
このAが大文字なのは、元の$\sin(x)$でxを $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限したコトを意味する。
だから、元の$\sin(x)$でのxの制限範囲が一般の場合は $\arcsin(x)$ などと小文字で書く.

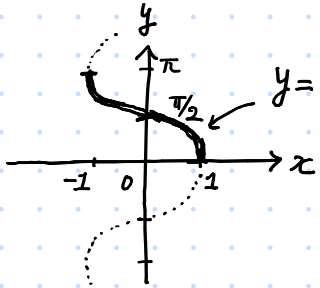
注) 教科書では $\mathrm{Sin}^{-1}(x)$ と書いているが、あまり一般的ではない…

こちらは y が制限される形になる. $[-\pi/2, \pi/2]$ に

$\cos(x)$

余弦函数とその逆函数.





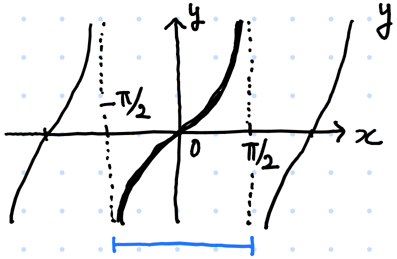
$y = \cos^{-1}(x) = \mathrm{Arccos}\,(x)$

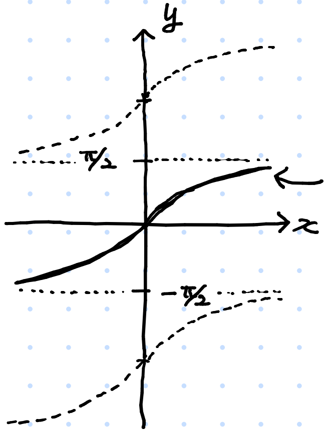
← yの値は $[0, \pi]$ に.

$\cos(x)$ではxをココに制限して逆函数を考えるのが標準.

$\tan(x)$

正接函数とその逆





← $y = \tan^{-1}(x) = \mathrm{Arctan}\,(x)$

← yの値は $[-\pi/2, \pi/2]$ に.

$\tan(x)$では xをココに制限して逆函数を考えるのが標準的.

ついでに… <u>双曲線函数</u>.

「ハイパーボリックサイン」と読む. 他も同様.

双曲正弦函数 $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

〃 余 〃 $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

〃 正接 〃 $\tanh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

知っておくと楽ができる知識.

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left\{\left(1+(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\cdots\right)+\left(1+(-ix)+\frac{1}{2!}(-ix)^2+\frac{1}{3!}(-ix)^3+\cdots\right)\right\} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \\ \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\left\{\left(\quad \text{〃} \quad\right)-\left(\quad \text{〃} \quad\right)\right\} = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots \end{cases}$$

偶数次の項のみ残る

奇 〃

を知っていると時々楽.

例えば、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

などが上の右の式を見るだけで理解できる.