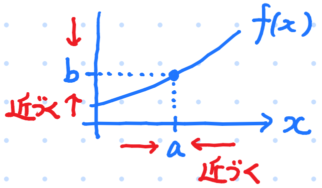
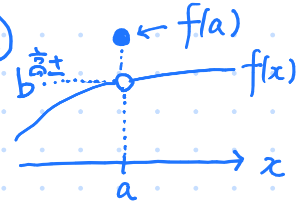
§1-2. 連続函数

函数の極限: xをaに限りなく近づけた時、$f(x)$が有限値bに限りなく近づくならば、bを$f(x)$のaでの極限値と言い、$\lim_{x\to a} f(x)=b$と書く。



注 数列を使って説明すると、$\lim_{x\to a} f(x)$は、$^{\forall}$数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\lim_{n\to\infty} x_n=a$に対して$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$のコトである。

注



となっている時は $\lim_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$ である!! 要注意だ。

この図を見れば想像できるか

函数が連続とは

定義: 函数$f(x)$が点aで連続 $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

この記号の意味は…

$A\Leftrightarrow B$ は「AならばBであり、かつ、BならばAである」と読む。つまり、AとBは同値。

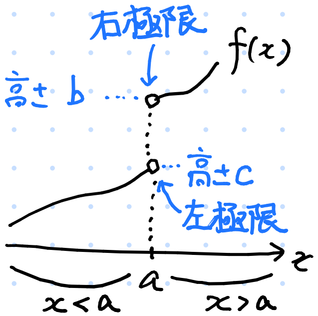
そして、$A\overset{d}{\Leftrightarrow}B$ は、「AとBは同値。ここではAをBで定義する」と読むと良い。

Th. 合成函数の連続性

$x=a$で$f(x)$が連続 かつ $y=f(a)$で$g(y)$が連続 $\Rightarrow$ 合成函数$g(f(x))$は$x=a$で連続。

$\lim_{x\to a} g(f(x))$ と $g(f(a))$ が一致するコトを示せば良い。

注: 函数の極限のちょっと細かい定義.



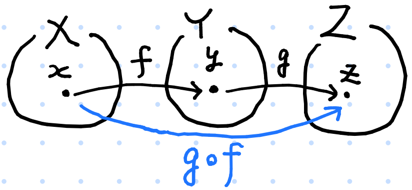
- $x>a$のままxをaに限りなく近づけた時、$f(x)$が有限値bに限りなく近づく時、bを$f(x)$のaでの右極限と言い、$\lim_{x\to a+0} f(x)=b$などと書く。
- $x<a$ 〃 c 〃 c 〃 左極限 〃 $\lim_{x\to a-0} f(x)=c$ 〃

そして

この2つの値b, cが一致する時、$x=a$での$f(x)$の極限値は$b(=c)$で、$\lim_{x\to a} f(x)=b(=c)$.

あらためて…

関数の合成：



2つの関数 $f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$,

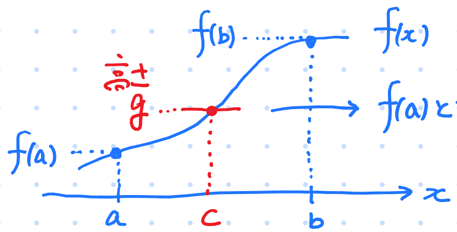
$g : Y \ni y \mapsto g(y) \in Z$ に対して

$g\circ f : X \ni x \mapsto g(f(x)) \in Z$ を f, g の結合，あるいは合成関数と言う。

→ $f\circ g$ では無いコトに注意しよう。

合成の結合則： $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

($h : X \to W$ も考えて)



→ $f(a)$ と $f(b)$ の間のどの高さ g に対しても、$f(c)=g$ を満たす c が存在する、と言っている。

Th. 中間値の定理.

$[a,b]$ で $f(x)$ が連続で、かつ、$f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a)$ と $f(b)$ の間の数 $\forall g$, $a < {}^{\exists}c < b$, s.t. $f(c) = g$.

ほぼ当然だが、「f が連続」の時のみ成立するコトに注意だ。

Th. 最大・最小の存在.

$[a,b]$ で $f(x)$ が連続 $\Rightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ で最大値，最小値をもつ。

→ これも当たり前に思えるかもしれないが、やはり「f が連続」の時のみ言えるコトであるのだ。