§1.1. 実数

実数: 無限に長い直線上の任意の点の位置を $-\infty < x < \infty$ なる x とみなして、この x を実数と言うよ。そして、実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く。

$\mathbb{R}$ ← 実数体と言う。

注）他にみんなが知っている数には、

整数	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$	→ これを集めて $\mathbb{Z}$ と書く。
自然数	$1, 2, 3, \ldots$ ← 1以上の整数	→ 〃 $\mathbb{N}$ 〃
有理数	m/n （m, n は整数で、$n \neq 0$）	→ 〃 $\mathbb{Q}$ 〃

の他、

複素数	$x+iy$ （$x, y \in \mathbb{R}$）	→ 〃 $\mathbb{C}$ 〃

i: 純虚数（$i^2 = -1$）

なども。

→ 注：$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

これらには スキマ が有り、議論の落とし穴にハマりかねないので、なるべく $\mathbb{R}$ を用いる。

区間：$\mathbb{R}$ の部分集合で、上下に「端」があるもの。具体的にはこの4種類。

$$(a,b) := \{\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{要素}} \mid \underbrace{a < x < b}_{\text{条件}}\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

{ } で集合を表わすよ。

→ 注："端" に $\pm\infty$ を使える。ただし、$\pm\infty \notin \mathbb{R}$ なので、$-\infty \leq a$ とか $b \leq \infty$ はナシ。よって、ありうるのは $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ のパターン。

数列：数字を $a_1, a_2, \cdots$ $\left(= \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ と 1番目から ∞ 番目まで並べたもの。

有界：${}^{\forall}$要素 $x \in$ その集合 X（数列の場合はその要素からなる集合）$<$ ${}^{\exists}$有限値 M の時「上に有界」と言う。（下に有界 も 同様）

記号で書くと、${}^{\exists}M \in \mathbb{R}$ s.t. $x \leq M$ for ${}^{\forall}x \in X$ などと書く。（次のページを見よ）

極限：数列 $\{a_1, a_2, \cdots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ で a_n が限りなく α に近づく時、（下の注☆へ）

「この数列は極限 α を持つ」と言い、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

と書く。

← この時、α が有限ならば「この数列は収束する」と言う。（収束しない場合は「発散する」などと言う）

例1：$a_n = 1/n$ の時、$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$、つまり、$a_n = 1/n$ は $n \to \infty$ で 0 に収束する。

例2：$a_n = (-1)^n$ の時、これは $n \to \infty$ で収束しない。

注☆：極限の定義は ε 論法（教科書の1.4章）でなされるのだが、ちょっと？難しい。この授業では扱わない予定。

単調: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ なる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を「単調増加である」と言う。(減少も同様).

Th. 有界な単調(実数)列は(実数の極限に)収束する。← 完備性と言う。$\mathbb{Q}$ などには(有理数体)この性質が無いので、使いにくいのだ。

例. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ($\in \mathbb{R}$) の時、数列 $\{a_n\}$ は
- 上に有界 ($^\forall a_n < 1$)
- 単調増加 ($a_n < a_{n+1}$)
- 極限は 1.

上限, 下限, 最大, 最小.
(sup, inf, max, min)

集合 X に対して、最大 of X を max(X) と書き、その定義を $\max(X) := {}^\exists x \in X$ s.t. $x \geq {}^\forall y \in X$. とする.
最小 〃 min(X) 〃 〃 $x \leq {}^\forall y \in X$ 〃

X によっては存在しない。

s.t. は such that の略。「ただし…」と読むと良いだろう。

上限 of X を sup(X) と書き、その定義を $\min\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq {}^\forall y \in X\}$ とする.
下限 of X inf(X) 〃 $\max\{$ 〃

この2つは必ず存在する …が、X の要素と同じ「体」に入るかは、その体の完備性に依る。

例: $X = (0, 3]$ に対し、
$\max X = 3$ だが、
$\min X$ は存在しない。
ちなみに、
$\sup X = 3$,
$\inf X = 0$ である。

記号 ∃, ∀ について

∃ は Exist の E をひっくり返した記号で、
∀ は All の A 〃 .
各々、
∃: とある○○が存在して
∀: 全ての○○に対して
という意味をもつ。

例 ${}^\exists x \in X$ s.t. $x \geq {}^\forall y \in X$ は、
「ある $x \in X$ が存在する。ただし x は全ての $y \in X$ に対して $x \geq y$ を満たす」という意味になる。

その他、マメ知識 (計算問題で用いる)

2項係数 $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ のコト。高校までは ${}_nC_k$ と書いていた気が…

ネイピア数 $e := 2.71828\cdots := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ のコト。