In [1]:
```
using Plots, SymPy
```

In [2]:
```
@syms x
```

Out[2]: (x,)

問 1 (3)

問題への注釈: Taylor展開の剰余項の形を厳密に書かせても役に立つシーンはあまり無いと思うが...

In [3]:
```
eq1 = x * sin(x)
```

Out[3]: $x\sin(x)$

In [4]:
```
series( eq1, x, 0, 5 )
```

Out[4]: $x^2 - \frac{x^4}{6} + O\left(x^5\right)$

In [12]:
```
eq1_1 = diff(eq1, x, 4 )
```

Out[12]: $x\sin(x) - 4\cos(x)$

よってまとめると... 4階微分の係数のところだけ x を $\alpha x, 0 \leq \alpha \leq 1$ と置き換えて表現すればよいので、

$$x^2 - \frac{\alpha x\sin(\alpha x) - 4\cos(\alpha x)}{4!}x^4, \text{ ただし } 0 \leq \alpha \leq 1$$

といった表記の答になる.

問 2 (4)

注釈: この問題も、最後の細かさはあまり要らない気がする...

In [13]:
```
eq2 = log(1 + x)
```

Out[13]: $\log(x+1)$

In [14]:
```
diff(eq2, x)
```

Out[14]: $\frac{1}{x+1}$

In [15]:
```
diff(eq2, x, 2)
```

Out[15]: $-\frac{1}{(x+1)^2}$

In [16]:
```
diff(eq2, x, 3)
```

Out[16]: $\frac{2}{(x+1)^3}$

In [17]:
```
diff(eq2, x, 4)
```

Out[17]: $-\frac{6}{(x+1)^4}$

$$(\frac{d}{dx})^n \log(1+x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^n}$$

となる．よって、問 1 (3) と同じノリで、最終的には、

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{d}{dx})^k \log(1+x)\Big|_{x=0} \frac{x^k}{k!} + R_n|_{係数のx=\alpha x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha x+1)^n} x^n$$

となる．

問 4 (2)

In [18]:
```
eq3 = (exp(x^2) - cos(x))/(x*sin(x))
```

Out[18]: $\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x\sin(x)}$

In [20]:
```
series( eq3, x, 0, 5 )
```

Out[20]: $\frac{3}{2} + \frac{17x^2}{24} + \frac{197x^4}{720} + O\left(x^5\right)$

なので、上の Taylor 展開から、

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\exp(x^2)-\cos(x)}{x\sin(x)} = \frac{3}{2}.$$

ちょっとずるい？ ならば、もう少し真面目にやると...

In [28]:
```
series(exp(x^2), x, 0, 5 )
```

Out[28]: $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O\left(x^5\right)$

In [29]:
```
series( cos(x), x, 0, 5 )
```

Out[29]: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O\left(x^5\right)$

となるので、

$$\exp(x^2) - \cos(x) = (3/2)x^2 + O(x^4)$$

が言える．

そして、

In [27]:
```
series(sin(x), x, 0, 3)
```

Out[27]: $x + O\left(x^3\right)$

であるので、分母については

$$x^2 + O(x^4)$$

であることがわかる．

よって元の式は上下の x^2 が共通なので消せて、

$$\frac{(3/2)+O(x^2)}{1+O(x^2)},$$

となり、$x \to 0$ で $3/2$ になる．

In [ ]: