

本試験（解析学概論）解答例

実施日：2026 年 7 月 28 日

問 1

関数

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

を区間 $0 \leq x \leq 1$ で考える。曲線 $y = f(x)$ 上に、2 点

$$(0, f(0)), \quad (1, f(1))$$

を結ぶ直線と平行な接線をもつ点が存在することを、平均値の定理を用いて説明し、その接点の x 座標を求める。

まず、 $1+x > 0$ は区間 $[0, 1]$ 上で常に成り立つので、 f は閉区間 $[0, 1]$ で連続であり、开区間 $(0, 1)$ で微分可能である。したがって、平均値の定理より、ある $c \in (0, 1)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

となる。

右辺は、2 点を結ぶ直線の傾きである。実際、

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

したがって、平均値の定理によって得られる点 c における接線の傾きは、2 点を結ぶ直線の傾きと等しい。よって、その接線はこの直線と平行である。

次に接点の x 座標を求める。商の微分法より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{x(x+2)}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

を解けばよい。両辺に $2(1+x)^2$ を掛けると、

$$2x(x+2) = (1+x)^2.$$

展開して整理すると、

$$2x^2 + 4x = x^2 + 2x + 1,$$

すなわち

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

よって、

$$x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

このうち $0 < x < 1$ を満たすものは

$$x = \sqrt{2} - 1$$

だけである。

したがって、求める接点の x 座標は

$$x = \sqrt{2} - 1$$

である。

問 2

関数

$$f(x) = \log(1+x)$$

の $x = 0$ を中心とする 2 次の Taylor 多項式を求める。

$x = 0$ を中心とする 2 次の Taylor 多項式は、

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

で与えられる。

まず、

$$f(0) = \log 1 = 0.$$

また、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

したがって、

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1.$$

以上を Taylor 多項式の式に代入すると、

$$f(x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2$$

となる。

よって、求める 2 次の Taylor 多項式は

$$x - \frac{x^2}{2}$$

である。

問 3

関数

$$f(x, y) = \sqrt{x + 2y}$$

について考える。

(a) 偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$

x について偏微分すると、

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{2}(x+2y)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+2y}}. \end{aligned}$$

一方、 y について偏微分する際には、内側の関数 $x+2y$ の y による微分が 2 であることに注意する。したがって、

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{1}{2}(x+2y)^{-1/2} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2y}}. \end{aligned}$$

よって、

$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+2y}}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+2y}}$

である。

(b) 点 $(2, 1)$ における全微分

2 変数関数の全微分は、

$$df = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

で与えられる。

点 $(2, 1)$ では

$$x+2y = 2+2 \cdot 1 = 4$$

なので、

$$f_x(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, \quad f_y(2, 1) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

したがって、点 $(2, 1)$ における全微分は

$df = \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} dy$
--

である。

(c) $f(2.04, 0.99)$ の近似値

点 $(2.04, 0.99)$ は点 $(2, 1)$ に近いので、全微分による一次近似を用いる。

変化量は

$$dx = 2.04 - 2 = 0.04, \quad dy = 0.99 - 1 = -0.01$$

である。また、

$$f(2, 1) = \sqrt{2+2 \cdot 1} = 2.$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(2.04, 0.99) &\simeq f(2, 1) + df \\ &= 2 + \frac{1}{4}(0.04) + \frac{1}{2}(-0.01) \\ &= 2 + 0.01 - 0.005 \\ &= 2.005. \end{aligned}$$

よって、

$f(2.04, 0.99) \simeq 2.005$

である。

問 4

$$f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2), \quad x(t) = t \cos t, \quad y(t) = t \sin t$$

とする。合成関数

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

について、連鎖律を用いて $F'(t)$ を求める。

まず、偏導関数は

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

である。また、

$$x'(t) = \cos t - t \sin t, \quad y'(t) = \sin t + t \cos t.$$

連鎖律より、

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

したがって、

$$F'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{1 + x(t)^2 + y(t)^2}.$$

ここで、

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t \\ &= t^2, \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) &= t \cos t(\cos t - t \sin t) \\ &\quad + t \sin t(\sin t + t \cos t) \\ &= t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= t. \end{aligned}$$

したがって、

$$F'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

よって、

$F'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$

である。

さらに、 $t = 1$ を代入すると、

$$F'(1) = \frac{2}{1+1} = 1.$$

したがって、

$F'(1) = 1$

である。

問 5

関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + 2y}$$

の点 $(0, 0)$ を中心とする 2 次までの Taylor 展開式を求める。

ここで、

$$u = x + 2y$$

と置けば、

$$f(x, y) = \sqrt{1 + u}.$$

1 変数関数 $\sqrt{1 + u}$ の $u = 0$ を中心とする 2 次までの Taylor 展開は、

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2$$

である。

ここに $u = x + 2y$ を代入すると、

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x + 2y) - \frac{1}{8}(x + 2y)^2.$$

さらに展開すると、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + \frac{x}{2} + y - \frac{1}{8}(x^2 + 4xy + 4y^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + y - \frac{x^2}{8} - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

したがって、求める 2 次までの Taylor 展開式は

$f(x, y) = 1 + \frac{x}{2} + y - \frac{x^2}{8} - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{2}$
--

である。

問 6

$x > 0$ において、初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$$

を解く。

右辺は y/x だけの関数になっているので、これは同次形の微分方程式である。そこで、

$$v = \frac{y}{x}$$

と置く。すなわち、

$$y = xv$$

である。 v は x の関数なので、積の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}.$$

これをもとの微分方程式に代入すると、

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + v^2.$$

両辺から v を引いて、

$$x \frac{dv}{dx} = v^2.$$

初期条件から v は初期点の近くで 0 ではないので、変数を分離して

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x}.$$

両辺を積分すると、

$$-\frac{1}{v} = \log x + C.$$

初期条件 $y(1) = 1$ より、

$$v(1) = \frac{y(1)}{1} = 1.$$

したがって、

$$-1 = \log 1 + C = C$$

であり、 $C = -1$ である。よって、

$$-\frac{1}{v} = \log x - 1.$$

これを整理すると、

$$\frac{1}{v} = 1 - \log x, \quad v = \frac{1}{1 - \log x}.$$

最後に $y = xv$ に戻すと、

$$y = \frac{x}{1 - \log x}.$$

したがって、初期値問題の解は

$$y = \frac{x}{1 - \log x}$$

である。

なお、分母が 0 になる $x = e$ ではこの解は定義されない。初期点 $x = 1$ を含む最大の定義区間は

$$0 < x < e$$

である。

問 7

初期値問題

$$(y \cos x + 2x) dx + (\sin x + 3y^2) dy = 0, \quad y(0) = 1$$

を解く。

この方程式を

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

の形と見ると、

$$M(x, y) = y \cos x + 2x, \quad N(x, y) = \sin x + 3y^2$$

である。

完全微分形であるかを調べると、

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x.$$

両者は等しいので、この微分方程式は完全微分形である。

そこで、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2x$$

を満たす関数 $\Phi(x, y)$ を求める。 x について積分すると、

$$\Phi(x, y) = y \sin x + x^2 + g(y)$$

となる。ここで $g(y)$ は y だけの関数である。

これを y について偏微分すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sin x + g'(y).$$

一方、これは $N(x, y)$ と等しくなければならないので、

$$\sin x + g'(y) = \sin x + 3y^2.$$

したがって、

$$g'(y) = 3y^2, \quad g(y) = y^3.$$

よって、一般解は

$$y \sin x + x^2 + y^3 = C$$

である。

初期条件 $y(0) = 1$ を代入すると、

$$1 \cdot \sin 0 + 0^2 + 1^3 = C$$

より、

$$C = 1.$$

したがって、初期値問題の解は、陰関数の形で

$$y \sin x + x^2 + y^3 = 1$$

である。

問 8

微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{4x}$$

の一般解を求める。

1. 斉次方程式の一般解

まず、対応する斉次方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

を考える。

特性方程式は

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

であり、

$$(r - 1)(r - 2) = 0$$

と因数分解できる。したがって、特性根は

$$r = 1, \quad r = 2$$

である。

よって、斉次方程式の一般解は

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

である。

2. 特解

右辺が $6e^{4x}$ なので、ヒントに従って特解を

$$y_p = Ae^{4x}$$

と仮定する。

このとき、

$$y'_p = 4Ae^{4x}, \quad y''_p = 16Ae^{4x}.$$

これらを微分方程式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} y''_p - 3y'_p + 2y_p &= (16A - 12A + 2A)e^{4x} \\ &= 6Ae^{4x}. \end{aligned}$$

これが右辺 $6e^{4x}$ と等しいので、

$$6A = 6, \quad A = 1.$$

したがって、特解は

$$y_p = e^{4x}$$

である。

以上より、一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{4x}$$

である。

問 9

定積分

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

の値を求める。

分母に現れる $1+e^x$ を新しい変数とする。すなわち、

$$u = 1 + e^x$$

と置くと、

$$du = e^x dx.$$

積分区間も変換する。

$$x = 0 \implies u = 1 + e^0 = 2,$$

$$x = \log 2 \implies u = 1 + e^{\log 2} = 3.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx &= \int_2^3 \frac{1}{u^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{6}$$

である。

問 10

定積分

$$\int_0^1 x \log(1+x) dx$$

の値を求める。

部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

を用いる。

ここで、

$$f(x) = \log(1+x), \quad g'(x) = x$$

とおく。このとき、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

である。

したがって、部分積分の公式より、

$$\int_0^1 x \log(1+x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \log(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx.$$

まず、第1項は

$$\left[\frac{x^2}{2} \log(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

である。

次に、第2項に現れる積分を計算する。多項式の割り算により、

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

である。実際、

$$x^2 = (1+x)(x-1) + 1$$

が成り立つ。

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \log(1+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \log 2 \\ &= -\frac{1}{2} + \log 2. \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log(1+x) dx &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \log 2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

したがって、

$\int_0^1 x \log(1+x) dx = \frac{1}{4}$

である。