

Mini Test 02（解析学概論）解答例

実施日：2026 年 7 月 21 日

問 1

初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x}, \quad y(1) = 1$$

を解く。

初期条件が $x = 1$ で与えられているので、 $x > 0$ の範囲で解を考える。右辺を整理すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{y}{x}$$

となる。右辺は y/x の関数になっているので、同次形の微分方程式として

$$u = \frac{y}{x}$$

と置く。すなわち、

$$y = xu$$

と書く。このとき積の微分法より、

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

である。

これをもとの微分方程式に代入すると、

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} + u$$

となる。両辺の u を消去して、

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

を得る。したがって、

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}$$

であるから、両辺を積分して、

$$u = \frac{1}{2} \log x + C$$

となる。

$u = y/x$ であったので、

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \log x + C,$$

すなわち、

$$y = x \left(\frac{1}{2} \log x + C \right)$$

である。

初期条件 $y(1) = 1$ を代入すると、

$$1 = 1 \left(\frac{1}{2} \log 1 + C \right) = C$$

であるから、 $C = 1$ となる。

よって解は

$$y = x + \frac{x}{2} \log x \quad (x > 0)$$

である。

問 2

初期値問題

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^x y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

を解く。

これはベルヌーイ型微分方程式である。初期値が $y(0) = 1/2 \neq 0$ なので、解を考えている範囲で $y \neq 0$ とし、

$$z = \frac{1}{y}$$

と置く。このとき、

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

である。

もとの方程式を y^2 で割ると、

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{y} = 2e^x$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}, \quad \frac{1}{y} = z$$

を代入すると、

$$-\frac{dz}{dx} + 2z = 2e^x,$$

すなわち、

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2e^x$$

を得る。

この一階線形微分方程式を、斉次方程式の一般解と一つの特解を求める方法で解く。まず、対応する斉次方程式

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 0$$

の一般解は、

$$z_h = Ce^{2x}$$

である。

次に、右辺が $-2e^x$ なので、特解を

$$z_p = Ae^x$$

と仮定する。このとき、

$$\frac{dz_p}{dx} = Ae^x$$

であるから、方程式の左辺は

$$\frac{dz_p}{dx} - 2z_p = Ae^x - 2Ae^x = -Ae^x$$

となる。これが $-2e^x$ に等しくなるためには、

$$A = 2$$

であればよい。したがって、

$$z_p = 2e^x$$

である。

よって z の一般解は、

$$z = Ce^{2x} + 2e^x$$

となる。

初期条件 $y(0) = 1/2$ より、

$$z(0) = \frac{1}{y(0)} = 2$$

である。したがって、

$$2 = C + 2$$

となり、 $C = 0$ である。よって、

$$z = 2e^x$$

となる。

最後に $z = 1/y$ に戻すと、

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

したがって、

$$y = \frac{1}{2}e^{-x}$$

である。

問 3

微分方程式

$$(2y - x) dx + x dy = 0$$

の一般解を求める。

$x \neq 0$ の区間で考え、両辺を dx で割ると、

$$2y - x + x \frac{dy}{dx} = 0$$

となる。これを整理すると、

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 1$$

である。これは一階線形微分方程式である。

積分因子は用いず、対応する斉次方程式の一般解と一つの特解を求める。まず、対応する斉次方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$$

を解く。これは変数分離形であり、 $y \neq 0$ として、

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$$

となる。両辺を積分すると、

$$\log |y| = -2 \log |x| + C$$

であるから、定数を取り直して、

$$y_h = \frac{C}{x^2}$$

を得る。 $y = 0$ も $C = 0$ の場合として含まれている。

次に、もとの非斉次方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 1$$

の特解を求める。右辺が定数であることから、

$$y_p = ax$$

という形を仮定する。このとき、

$$\frac{dy_p}{dx} = a$$

であるから、左辺は

$$a + \frac{2}{x}(ax) = 3a$$

となる。これが右辺の 1 に等しくなるためには、

$$3a = 1$$

であればよい。したがって、

$$a = \frac{1}{3}, \quad y_p = \frac{x}{3}$$

である。

よって一般解は、斉次方程式の一般解と特解の和として、

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3}$$

となる。

したがって、一般解は

$$y = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

である。また、両辺に x^2 を掛ければ、陰関数の形では

$$x^2 y - \frac{x^3}{3} = C$$

と書ける。

問 4

微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 6x + 1$$

の一般解を求める。

1. 斉次方程式の一般解

まず、対応する斉次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

を考える。

特性方程式は

$$r^2 - r - 2 = 0$$

であり、

$$(r - 2)(r + 1) = 0$$

と因数分解できる。したがって、特性根は

$$r = 2, \quad r = -1$$

である。

よって斉次方程式の一般解は

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

となる。

2. 特解

右辺が一次式 $6x + 1$ なので、特解を

$$y_p = ax + b$$

と仮定する。

このとき、

$$y'_p = a, \quad y''_p = 0.$$

これらをもとの方程式の左辺に代入すると、

$$0 - a - 2(ax + b) = 6x + 1.$$

整理して、

$$-2ax - a - 2b = 6x + 1.$$

両辺の係数を比較すると、

$$-2a = 6, \quad -a - 2b = 1.$$

第 1 式から

$$a = -3.$$

これを第 2 式に代入すると、

$$3 - 2b = 1,$$

したがって、

$$b = 1.$$

よって特解は

$$y_p = -3x + 1$$

である。

以上より、一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 3x + 1$$

である。

問 5

不定積分

$$\int \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{x} dx$$

を求める。ただし $x \neq 0$ とする。

まず分子を展開する。

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

したがって、

$$\begin{aligned} (x+1)^3 - (x-1)^3 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &\quad - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 6x^2 + 2. \end{aligned}$$

よって被積分関数は

$$\frac{6x^2 + 2}{x} = 6x + \frac{2}{x}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{x} dx &= \int \left(6x + \frac{2}{x} \right) dx \\ &= 3x^2 + 2 \log |x| + C. \end{aligned}$$

よって、

$$3x^2 + 2 \log |x| + C$$

である。

問 6

$$f(x) = x^2 - 1$$

とする。

(a) 定積分

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx$$

を計算する。

原始関数は

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって、

0

である。

(b) 曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積

まず、 x 軸との交点を求める。

$$x^2 - 1 = 0$$

より、

$$x = -1, \quad x = 1.$$

区間 $[-1, 1]$ では

$$x^2 - 1 \leq 0$$

なので、グラフは x 軸より下にある。

一方、区間 $[1, 2]$ では

$$x^2 - 1 \geq 0$$

なので、グラフは x 軸より上にある。

したがって面積 A は

$$A = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

である。

第 1 項は

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx &= -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1 \\ &= -\left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

よって、

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

したがって面積は

$\frac{8}{3}$

である。

ここで、(a) の定積分は正負を付けて計算するため 0 となるが、面積では x 軸より下の部分も正として数えるため、答えが異なることに注意する。

問 7

$$G(x) = \int_2^{1+x^2} (t^3 + 1) dt$$

とする。

(a) $G'(x)$

微分積分学の基本定理と合成関数の微分法を用いる。

一般に、

$$H(x) = \int_a^{u(x)} h(t) dt$$

ならば、

$$H'(x) = h(u(x))u'(x)$$

である。

ここでは

$$h(t) = t^3 + 1, \quad u(x) = 1 + x^2$$

なので、

$$u'(x) = 2x.$$

したがって、

$$G'(x) = \{(1+x^2)^3 + 1\} \cdot 2x.$$

よって、

$$G'(x) = 2x \{(1+x^2)^3 + 1\}$$

である。

(b) $G(0)$

$x = 0$ を代入すると、

$$G(0) = \int_2^1 (t^3 + 1) dt.$$

積分区間の上端が下端より小さいので、値は負になる可能性がある。

原始関数は

$$\frac{t^4}{4} + t$$

であるから、

$$\begin{aligned} G(0) &= \left[\frac{t^4}{4} + t \right]_2^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} + 1 \right) - \left(\frac{16}{4} + 2 \right) \\ &= \frac{5}{4} - 6 \\ &= -\frac{19}{4}. \end{aligned}$$

したがって、

$$G(0) = -\frac{19}{4}$$

である。

問 8

定積分

$$\int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 4} dx$$

を求める。

分母

$$x^3 + 2x + 4$$

を微分すると、

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 4) = 3x^2 + 2$$

となり、分子と一致する。そこで、

$$u = x^3 + 2x + 4$$

と置く。

すると、

$$du = (3x^2 + 2) dx.$$

積分区間も変換する。

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 4,$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad u = 7.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 4} dx &= \int_4^7 \frac{1}{u} du \\ &= [\log u]_4^7 \\ &= \log 7 - \log 4 \\ &= \log \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

よって、

$$\log \frac{7}{4}$$

である。

問 9

定積分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx$$

を求める。

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

であり、

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

である。そこで、

$$t = \tan x$$

と置く。

すると、

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

積分区間は

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \tan 0 = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad t = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx &= \int_0^1 (1+t)^2 dt \\ &= \left[\frac{(1+t)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

よって、

$\frac{7}{3}$

である。

問 10

定積分

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x) \cos x \, dx$$

を求める。

部分積分を用いる。

$$u = \pi - 2x, \quad dv = \cos x \, dx$$

と置くと、

$$du = -2 \, dx, \quad v = \sin x.$$

部分積分の公式

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

より、

$$\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x) \cos x \, dx = [(\pi - 2x) \sin x]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

境界項は、

$$(\pi - \pi) \sin \frac{\pi}{2} - \pi \sin 0 = 0.$$

また、

$$\begin{aligned}2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx &= 2[-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= 2\left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

したがって、

2

である。