解答例

問 1. 求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$$

である。このままでは

$$\infty-\infty$$

の形になっているので，有理化する。

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}.$$

したがって，

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{(4n^2+3n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}.$$

分子を整理すると，

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}.$$

ここで分母分子を n で割ると，

$$\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}.$$

$n\to\infty$ のとき，

$$\frac{3}{n}\to 0$$

だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

したがって答えは

$$\boxed{\frac{3}{4}}$$

である。

問 2. 求める極限を

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+2x}{1-3x} \right)^{1/x}$$

とおく。
対数を取って考えると，

$$\log L = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+2x}{1-3x} \right).$$

対数の性質より，

$$\log \left(\frac{1+2x}{1-3x} \right) = \log(1+2x) - \log(1-3x).$$

したがって，

$$\log L = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\log(1+2x)}{x} - \frac{\log(1-3x)}{x} \right\}.$$

まず，

$$\frac{\log(1+2x)}{x} = 2 \frac{\log(1+2x)}{2x}.$$

ここで $x \to 0$ のとき $2x \to 0$ であり，

$$\lim_{u \to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1$$

を用いると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+2x)}{x} = 2.$$

次に，

$$\frac{\log(1-3x)}{x} = -3 \frac{\log(1-3x)}{-3x}.$$

ここで $x \to 0$ のとき $-3x \to 0$ であり，同じく

$$\lim_{u \to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1$$

を用いると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-3x)}{x} = -3.$$

よって，

$$\log L = 2 - (-3) = 5.$$

したがって,

$$L = e^5.$$

ゆえに

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+2x}{1-3x} \right)^{1/x} = \boxed{e^5}$$

である。

問 3.

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \log(1+x)$$

である。積の微分法と合成関数の微分法より、

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' \log(1+x) + \mathrm{e}^{x^2} (\log(1+x))'.$$

ここで

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2x\mathrm{e}^{x^2}, \qquad (\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

であるから、

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \log(1+x) + \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+x}.$$

したがって、

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^{x^2} \left(2x \log(1+x) + \frac{1}{1+x} \right)}.$$

また、

$$f(0) = \mathrm{e}^0 \log 1 = 0,$$

$$f'(0) = \mathrm{e}^0 \left(0 + \frac{1}{1} \right) = 1$$

である。

よって、$x = 0$ における接線は

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

より、

$$\boxed{y = x}$$

である。

問 4.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

である。商の微分法より、

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

したがって、

$$f'(x) = 0$$

となるのは

$$1 - x^2 = 0$$

より、

$$x = \pm 1$$

である。
分母 $(1+x^2)^2$ は常に正であるから、$f'(x)$ の符号は $1-x^2$ の符号で決まる。したがって、

$$f'(x) < 0 \quad (x < -1),$$
$$f'(x) > 0 \quad (-1 < x < 1),$$
$$f'(x) < 0 \quad (1 < x)$$

である。
よって、関数 $f(x)$ は

$$(-\infty, -1) \text{ で減少},$$
$$(-1, 1) \text{ で増加},$$
$$(1, \infty) \text{ で減少}$$

する。
したがって、$x = -1$ で極小値をとり、$x = 1$ で極大値をとる。それぞれの値は

$$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2},$$
$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

である。
また、

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

であるから、これらは実際に最大値・最小値である。
したがって、

$$\boxed{\text{最大値は } \frac{1}{2} \text{ であり、} x = 1 \text{ のときにとる}}$$

であり、

$$\boxed{\text{最小値は } -\frac{1}{2} \text{ であり、} x = -1 \text{ のときにとる}}$$

である。

問 5.

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

である。まず導関数を求めると、

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

である。したがって、

$$f'(x) = 0$$

となるのは

$$x = 0, \quad x = 3$$

である。

$4x^2 \geq 0$ であり、$x \neq 0$ では $4x^2 > 0$ であるから、$f'(x)$ の符号は基本的に $x-3$ の符号で決まる。したがって、

$$f'(x) < 0 \quad (x < 3,\ x \neq 0),$$

$$f'(x) > 0 \quad (3 < x)$$

である。

よって、$x = 0$ では $f'(x) = 0$ であるが、前後で符号は変わらない。したがって、$x = 0$ は極値点ではない。

一方、$x = 3$ では $f'(x)$ が負から正に変わるので、極小点である。その値は

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = 81 - 108 = -27$$

である。したがって、

$$\boxed{x = 3 \text{ で極小値 } -27 \text{ をとる}}$$

である。極大値は存在しない。

次に凹凸を調べる。2 階導関数は

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

である。したがって、

$$f''(x) = 0$$

となるのは

$$x = 0, \quad x = 2$$

である。

符号を調べると、

$$f''(x) > 0 \quad (x < 0),$$

$$f''(x) < 0 \quad (0 < x < 2),$$

$$f''(x) > 0 \quad (2 < x)$$

である。

したがって、

$$x < 0, \quad 2 < x$$

で下に凸であり、

$$0 < x < 2$$

で上に凸である。

また、$x = 0$ と $x = 2$ では $f''(x)$ の符号が変わるので、いずれも変曲点である。対応する y 座標は

$$f(0) = 0,$$

$$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = 16 - 32 = -16$$

である。

したがって、変曲点は

$$\boxed{(0,0),\ (2,-16)}$$

である。

問 6.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

について、$x = 0$ のまわりで Taylor 展開する。

一般に、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + O(x^3) \quad (x \to 0)$$

である。ここで $\alpha = 1/2$ とすると、

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + O(x^3).$$

したがって、

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + O(x^3)$$

であるから、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

となる。

よって、

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = -\frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

である。したがって、

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{8} + O(x)$$

となる。

ゆえに、

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{8}}$$

である。

問 7. 連鎖律より，

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

である．
まず，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y$$

であり，

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = 1$$

だから，

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2x + vz + y$$

となる．ここに

$$x = u + v, \qquad y = uv, \qquad z = u - v$$

を代入すると，

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2(u+v) + v(u-v) + uv$$

である．したがって，

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = 2u + 2v + 2uv - v^2}$$

である．
同様に，連鎖律より，

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

である．
ここで，

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -1$$

だから，

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 2x + uz - y$$

となる．ここに

$$x = u + v, \qquad y = uv, \qquad z = u - v$$

を代入すると，

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 2(u+v) + u(u-v) - uv$$

である．したがって，

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial v} = u^2 + 2u + 2v - 2uv}$$

である．

問 8. 曲面を

$$z = f(x, y)$$

と見る。ただし

$$f(x, y) = x^2 y + y^2$$

である。

まず，点 $(1, 2, 6)$ が曲面上にあることを確認すると，

$$f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

であるから，確かに曲面上の点である。

偏導関数を求めると，

$$f_x(x, y) = 2xy, \qquad f_y(x, y) = x^2 + 2y$$

である。

したがって，

$$f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4, \qquad f_y(1, 2) = 1^2 + 2 \cdot 2 = 5$$

である。

接平面の公式

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

を用いると，

$$z - 6 = 4(x - 1) + 5(y - 2)$$

である。

これを整理すると，

$$z - 6 = 4x - 4 + 5y - 10$$

だから，

$$z = 4x + 5y - 8$$

である。

したがって，接平面の方程式は

$$\boxed{z = 4x + 5y - 8}$$

である。

標準形で書けば，

$$4x + 5y - z - 8 = 0$$

である。よって，この平面の法線ベクトルの一つは

$$(4, 5, -1)$$

である。

したがって，点 $(1,2,6)$ を通る法線は，媒介変数を s として

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 4s, \\ y = 2 + 5s, \\ z = 6 - s \end{cases}}$$

である。

問 9.

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

の $(0,0)$ を中心とする 2 次までの Taylor 多項式を求める。

まず，

$$f(0,0) = e^0 \cos 0 = 1$$

である。

次に 1 次の偏導関数は

$$f_x(x,y) = e^x \cos y, \qquad f_y(x,y) = -e^x \sin y$$

である。

したがって，

$$f_x(0,0) = 1, \qquad f_y(0,0) = 0$$

である。

さらに 2 次の偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y,$$
$$f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y,$$
$$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$$

である。

したがって，

$$f_{xx}(0,0) = 1, \qquad f_{xy}(0,0) = 0, \qquad f_{yy}(0,0) = -1$$

である。

2 変数関数の 2 次までの Taylor 多項式は

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\}$$

である。

これに上で求めた値を代入すると，

$$1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

を得る。

したがって，求める 2 次までの Taylor 多項式は

$$\boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}$$

である。

問 10. 制約条件を

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

とおく．制約集合上では

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

である．また，制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす点では

$$(x,y) \neq (0,0)$$

であるから，

$$\nabla g(x,y) \neq 0$$

である．したがって，制約条件付き極値点では Lagrange の未定係数法を用いることができる．
いま，

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2$$

なので，

$$\nabla f(x,y) = (2x, 6y)$$

である．したがって，制約条件付き極値点では，ある実数 λ が存在して

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

を満たす．すなわち，

$$(2x, 6y) = \lambda(2x, 2y)$$

である．これを成分ごとに書くと，

$$2x = 2\lambda x, \qquad 6y = 2\lambda y$$

である．したがって，

$$(1-\lambda)x = 0, \qquad (3-\lambda)y = 0$$

となる．
もし $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ ならば，

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3$$

となり，矛盾する．したがって，

$$x = 0 \qquad \text{または} \qquad y = 0$$

でなければならない．
これを制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

と合わせると，候補点は

$$(1,0), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (0,-1)$$

である．
次に，これらの候補点が制約条件のもとで局所的極大点か局所的極小点かを判定する．

まず，点 $(1, 0)$ の近くを考える．この点の近くでは $x > 0$ としてよいので，制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

から

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

と書ける．これは極座標表示ではなく，制約条件を局所的に x について解いたものである．
このとき，

$$x^2 = 1 - y^2$$

だから，

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 = 1 - y^2 + 3y^2 = 1 + 2y^2$$

となる．したがって，

$$f(x, y) \geq 1$$

であり，等号成立は $y = 0$ のときである．点 $(1, 0)$ の近くで $y = 0$ ならば $x = 1$ であるから，等号成立は点 $(1, 0)$ 自身に限られる．
よって，$(1, 0)$ は制約条件のもとでの狭義の局所的極小点であり，

$$f(1, 0) = 1$$

である．
同様に，点 $(-1, 0)$ の近くでは $x < 0$ としてよいので，

$$x = -\sqrt{1 - y^2}$$

と書ける．この場合も

$$x^2 = 1 - y^2$$

であるから，

$$f(x, y) = 1 + 2y^2$$

となる．したがって，$(-1, 0)$ も制約条件のもとでの狭義の局所的極小点であり，

$$f(-1, 0) = 1$$

である．
次に，点 $(0, 1)$ の近くを考える．この点の近くでは $y > 0$ としてよいので，制約条件から

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

と書ける．したがって，

$$y^2 = 1 - x^2$$

である．これを f に代入すると，

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 = x^2 + 3(1 - x^2) = 3 - 2x^2$$

となる．したがって，

$$f(x,y) \leq 3$$

であり，等号成立は $x=0$ のときである．点 $(0,1)$ の近くで $x=0$ ならば $y=1$ であるから，等号成立は点 $(0,1)$ 自身に限られる．
よって，$(0,1)$ は制約条件のもとでの狭義の局所的極大点であり，

$$f(0,1)=3$$

である．
同様に，点 $(0,-1)$ の近くでは $y<0$ としてよいので，

$$y=-\sqrt{1-x^2}$$

と書ける．この場合も

$$y^2=1-x^2$$

であるから，

$$f(x,y)=3-2x^2$$

となる．したがって，$(0,-1)$ も制約条件のもとでの狭義の局所的極大点であり，

$$f(0,-1)=3$$

である．
最終的にまとめると、$\boxed{\text{解答}}$は以下の通り．
制約条件

$$x^2+y^2=1$$

のもとで，関数

$$f(x,y)=x^2+3y^2$$

は

$$\boxed{(1,0),\ (-1,0)}$$

で狭義の局所的極小となる．そのときの値は

$$\boxed{1}$$

である．
また，

$$\boxed{(0,1),\ (0,-1)}$$

で狭義の局所的極大となる．そのときの値は

$$\boxed{3}$$

である．