

問題解答例 for section 7.2 (教科書 p.170)

学生側

私は大阪大学の1年生です。理系学部にいますが数学科ではありません。下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

p.170, 問 1 (4) 常微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = 0$ の一般解を求めよ。

p.170, 問 2 (3) $D = d/dx$ として、 $(1/((D-1)(D-2)))xe^x$ を求めよ。

p.170, 問 3 (1) $D = d/dx$ として、常微分方程式 $D(D+3)y = e^{3x} + x$ の解を求めよ。

p.170, 問 4 (1) $D = d/dx$ として、常微分方程式 $(D-2)(D+3)y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ の解を求めよ。

chatGPT

解法の型が少し違う4問なので、定数係数線形方程式・演算子法・初期条件つき問題を分けて、途中計算を省かずに整理します。

以下では $D = \frac{d}{dx}$ と書きます。定数係数線形常微分方程式では、まず

$$D(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$$

となることを利用して、特性方程式を立てるのが基本です。

p.170, 問 1 (4)

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

を解きます。

これは

$$(D^2 + 2D - 3)y = 0$$

と書けます。特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

です。因数分解すると

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

なので、

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -3$$

を得ます。

したがって、対応する解は

$$e^x, \quad e^{-3x}$$

です。よって一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

です。ただし C_1, C_2 は任意定数です。

p.170, 問 2 (3)

$$\frac{1}{(D-1)(D-2)} x e^x$$

を求めます。

これは、

$$(D-1)(D-2)y = x e^x$$

を満たす特解 y を求める、という意味です。

ここで右辺に e^x が含まれているので、

$$y = e^x v$$

とおきます。すると、次の公式を使えます：

$$D(e^{ax}v) = e^{ax}(D+a)v$$

したがって、

$$(D-1)(D-2)(e^xv) = e^x\{(D+1-1)(D+1-2)v\}$$

です。つまり

$$(D-1)(D-2)(e^xv) = e^xD(D-1)v$$

となります。よって求める方程式は

$$e^xD(D-1)v = xe^x$$

となり、両辺を e^x で割って

$$D(D-1)v = x$$

すなわち

$$v'' - v' = x$$

を解けばよいです。

ここで x は 1 次式なので、 v を 2 次式

$$v = ax^2 + bx$$

の形で探します。すると

$$v' = 2ax + b, \quad v'' = 2a$$

なので、

$$v'' - v' = 2a - (2ax + b) = -2ax + (2a - b)$$

です。これが x に等しいので、

$$-2a = 1, \quad 2a - b = 0$$

を満たせばよいです。したがって

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1$$

です。よって

$$v = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

となります。したがって

$$y = e^x v = e^x \left(-\frac{1}{2}x^2 - x \right)$$

です。

したがって

$$\boxed{\frac{1}{(D-1)(D-2)} x e^x = -\left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x}$$

です。

ここで求めているのは特解なので、斉次解に対応する任意定数項は含めません。

p.170, 問 3 (1)

$$D(D+3)y = e^{3x} + x$$

を解きます。

まず微分方程式として書き直すと、

$$D(D+3)y = (D^2 + 3D)y = y'' + 3y'$$

なので、

$$y'' + 3y' = e^{3x} + x$$

です。

線形方程式なので、まず斉次方程式

$$D(D+3)y = 0$$

を解きます。特性方程式は

$$\lambda(\lambda + 3) = 0$$

なので、

$$\lambda = 0, \quad \lambda = -3$$

です。したがって斉次方程式の一般解は

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

です。

次に特解を求めます。右辺は

$$e^{3x} + x$$

なので、それぞれに対する特解を足し合わせればよいです。

まず

$$D(D + 3)y = e^{3x}$$

に対しては、演算子

$$P(D) = D(D + 3)$$

を考えると、

$$P(3) = 3(3 + 3) = 18$$

です。したがって

$$y_{p,1} = \frac{1}{18} e^{3x}$$

です。

次に

$$D(D + 3)y = x$$

に対する特解を求めます。つまり

$$y'' + 3y' = x$$

を解きます。右辺が1次式なので、

$$y_{p,2} = ax^2 + bx$$

とおきます。すると

$$y'_{p,2} = 2ax + b, \quad y''_{p,2} = 2a$$

なので、

$$y''_{p,2} + 3y'_{p,2} = 2a + 3(2ax + b) = 6ax + (2a + 3b)$$

です。これが x に等しいので、

$$6a = 1, \quad 2a + 3b = 0$$

を満たせばよいです。したがって

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{9}$$

です。よって

$$y_{p,2} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x$$

です。

したがって、もとの方程式の一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{18} e^{3x} + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{9} x$$

です。

p.170, 問 4 (1)

$$(D - 2)(D + 3)y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

を解きます。

まず

$$(D-2)(D+3) = D^2 + D - 6$$

なので、方程式は

$$y'' + y' - 6y = e^{3x}$$

です。

まず斉次方程式

$$(D-2)(D+3)y = 0$$

を解きます。特性方程式は

$$(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$$

なので、

$$\lambda = 2, \quad \lambda = -3$$

です。したがって斉次解は

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

です。

次に特解を求めます。

$$P(D) = (D-2)(D+3)$$

とおくと、

$$P(3) = (3-2)(3+3) = 6$$

です。したがって

$$y_p = \frac{1}{6} e^{3x}$$

です。

よって一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} e^{3x}$$

です。

ここで初期条件を使います。まず

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{6}$$

なので、

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 1$$

すなわち

$$C_1 + C_2 = \frac{5}{6}$$

です。

次に微分すると、

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

です。したがって

$$y'(0) = 2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{2}$$

なので、初期条件 $y'(0) = 0$ より

$$2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

すなわち

$$2C_1 - 3C_2 = -\frac{1}{2}$$

です。

したがって

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{5}{6}, \\ 2C_1 - 3C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

を解きます。第一式から

$$C_1 = \frac{5}{6} - C_2$$

です。これを第二式に代入すると、

$$2\left(\frac{5}{6} - C_2\right) - 3C_2 = -\frac{1}{2}$$

すなわち

$$\frac{5}{3} - 5C_2 = -\frac{1}{2}$$

です。よって

$$-5C_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{3} = -\frac{3}{6} - \frac{10}{6} = -\frac{13}{6}$$

なので、

$$C_2 = \frac{13}{30}$$

です。また

$$C_1 = \frac{5}{6} - \frac{13}{30} = \frac{25}{30} - \frac{13}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

です。

したがって求める解は

$$y = \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{13}{30}e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

です。