

問題解答例 for section 7.1 (教科書 p.163)

学生側

私は大阪大学の1年生です。理系学部にいますが数学科ではありません。下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

p.163, 問 2 (3) 常微分方程式 $y' = y/(x(x+1))$ の解を求めよ。

p.163, 問 4 (1) 常微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ の解を求めよ。

p.163, 問 5 (1) 常微分方程式 $(-x+y+2)dx + (x-y+1)dy = 0$ が完全微分形であることを確認せよ。また、その解を求めよ。

chatGPT

3問とも、一階常微分方程式の典型的な型です。特に問2では、方程式が定義されない点 $x = 0, -1$ を解の区間から除く点に注意して解きます。

以下、順に解きます。

問 2 (3)

$$y' = \frac{y}{x(x+1)}$$

これは **変数分離形** です。ただし右辺に $x(x+1)$ があるので、方程式は

$$x = 0, \quad x = -1$$

では定義されません。したがって、解はこれらの点を含まない区間上で考えます。
まず

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(x+1)}$$

と書きます。 $y \neq 0$ として両辺を y で割ると、

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(x+1)}$$

です。したがって

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x(x+1)} dx$$

と変数分離できます.

右辺を部分分数分解します.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

なので,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

より

$$\log |y| = \log |x| - \log |x+1| + C$$

すなわち

$$\log |y| = \log \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

です. よって

$$|y| = C_1 \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

となり, 定数の符号も含めて書けば

$$y = C \frac{x}{x+1}$$

となります.

なお, 途中で $y \neq 0$ として割りましたが, $C = 0$ とすれば $y = 0$ も含まれます.

したがって解は

$$\boxed{y = C \frac{x}{x+1}}$$

です. ただし, これは $x = 0, -1$ を含まない区間上の解です.

問 4 (1)

$$y' - y = e^{2x}$$

これは 一階線形常微分方程式 です.

標準形としては

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の形で, 今回は

$$p(x) = -1, \quad q(x) = e^{2x}$$

です.

積分因子を使います. 積分因子は

$$\exp\left(\int -1 dx\right) = e^{-x}$$

です。両辺に e^{-x} を掛けると、

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}e^{2x}$$

すなわち

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^x$$

です。

左辺は積の微分になっています。実際、

$$(e^{-x}y)' = e^{-x}y' - e^{-x}y$$

なので、

$$(e^{-x}y)' = e^x$$

となります。両辺を積分すると、

$$e^{-x}y = e^x + C$$

です。したがって両辺に e^x を掛けて、

$$y = e^{2x} + Ce^x$$

となります。

よって解は

$$\boxed{y = e^{2x} + Ce^x}$$

です。

確認すると、

$$y' = 2e^{2x} + Ce^x$$

なので、

$$y' - y = (2e^{2x} + Ce^x) - (e^{2x} + Ce^x) = e^{2x}$$

となり、確かに方程式を満たします。

問 5 (1)

$$(-x + y + 2) dx + (x - y + 1) dy = 0$$

まず

$$M(x, y) = -x + y + 2, \quad N(x, y) = x - y + 1$$

とおきます.

微分方程式

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

が完全微分形であるとは, ある関数 $F(x, y)$ が存在して

$$dF = F_x dx + F_y dy$$

となり,

$$F_x = M, \quad F_y = N$$

が成り立つことです.

そのための確認条件は

$$M_y = N_x$$

です. 実際に計算すると,

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y}(-x + y + 2) = 1$$

また

$$N_x = \frac{\partial}{\partial x}(x - y + 1) = 1$$

です. したがって

$$M_y = N_x$$

なので, この微分方程式は完全微分形です.

次に, ポテンシャル関数 $F(x, y)$ を求めます.

まず

$$F_x = M = -x + y + 2$$

なので, これを x について積分します. このとき y は定数として扱います.

$$F(x, y) = \int (-x + y + 2) dx$$

より

$$F(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy + 2x + \varphi(y)$$

となります. ここで $\varphi(y)$ は y だけの関数です.

次に, これを y で偏微分します.

$$F_y = x + \varphi'(y)$$

一方,

$$F_y = N = x - y + 1$$

でなければならないので,

$$x + \varphi'(y) = x - y + 1$$

したがって

$$\varphi'(y) = -y + 1$$

です. これを積分すると,

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + y$$

となります. 定数は最後の積分定数に吸収されるので省略します.
よって

$$F(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy + 2x - \frac{y^2}{2} + y$$

です. したがって微分方程式の解は

$$F(x, y) = C$$

すなわち

$$-\frac{x^2}{2} + xy + 2x - \frac{y^2}{2} + y = C$$

です.

少し整理すると,

$$-\frac{1}{2}(x - y)^2 + 2x + y = C$$

とも書けます. したがって同値な形として

$$-\frac{1}{2}(x - y)^2 + 2x + y = C$$

でもよいです.