

数学の不定積分問題



私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。

下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。

なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

p.61, 問 1(1), 不定積分 $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})} dx$ を求めよ。

p.61, 問 1(2), 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx$ を求めよ。

p.61, 問 2(1), 定積分 $\int_0^2 x^2 e^{2x} dx$ の値を求めよ。

p.61, 問 2(2), 定積分 $\int_0^{\pi/4} \cos(x)^3 dx$ の値を求めよ。

p.61, 問 3(1), 連続な $f(x)$ に対し、 $\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x+1} f(2t) dt$ を f を用いて表わせ。

p.66, 問 1(3), 不定積分 $\int \frac{(x-1)}{(2-x)^3} dx$ を求めよ。

p.66, 問 2(2), 不定積分 $\int \frac{x\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})} dx$ を求めよ。

p.66, 問 3(2), 不定積分 $\int \frac{1}{(2+\cos(x))} dx$ を求めよ。

p.72, 問 1(1), 広義積分 $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$ の値を求めよ。

p.72, 問 1(3), 広義積分 $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ の値を求めよ。

p.72, 問 1(6), 広義積分 $\int_0^1 x \log(x) dx$ の値を求めよ。

p.78, 問 1(2), 曲線 $y=\log(x)$, $(1 \leq x \leq a)$ の長さを求めよ。

p.78, 問 2(2), 曲線 $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $(0 \leq t \leq \pi/2)$ の長さを求めよ。
表示を増やす表示を減らす

以下、 C は任意定数です。不定積分では、最後に必ず $+C$ が付きます。

p.61 問 1(1)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

分母に e^{-x} があるので、分子分母に e^x を掛けます。

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

したがって

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

ここで

$$u = e^x$$

とおくと、

$$du = e^x dx$$

なので、

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

これは基本公式

$$\int \frac{1}{1 + u^2} du = \arctan u + C$$

より、

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C$$

よって

$$\boxed{\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \arctan(e^x) + C}$$

p.61 問 1(2)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + 3x}} dx$$

これは

$$\int (1 + 3x)^{-1/2} dx$$

と書けます。

$$u = 1 + 3x$$

とおくと、

$$du = 3 dx$$

すなわち

$$dx = \frac{1}{3} du$$

です。したがって

$$\begin{aligned} \int (1 + 3x)^{-1/2} dx &= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du \\ \int u^{-1/2} du &= 2u^{1/2} \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{2}{3} u^{1/2} + C$$

元に戻して

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+3x} + C}$$

p.61 問 2(1)

$$\int_0^2 x^2 e^{2x} dx$$

部分積分を使います。まず不定積分

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

を求めます。

$$u = x^2, \quad dv = e^{2x} dx$$

とおくと、

$$du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

です。したがって

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

次に

$$\int x e^{2x} dx$$

も部分積分します。

$$u = x, \quad dv = e^{2x} dx$$

とすると、

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

なので

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

だから

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \\ &= e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

よって

$$\int_0^2 x^2 e^{2x} dx = \left[e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]_0^2$$

$x = 2$ のとき

$$e^4 \left(2 - 1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} e^4$$

$x = 0$ のとき

$$1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

したがって

$$\boxed{\int_0^2 x^2 e^{2x} dx = \frac{5e^4 - 1}{4}}$$

p.61 問 2(2)

$$\int_0^{\pi/4} \cos^3 x \, dx$$

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)$$

と変形します。そこで

$$u = \sin x$$

とおくと、

$$du = \cos x \, dx$$

です。積分区間も変えます。

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - u^2) \, du \\ &= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

ここで

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

なので

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{2}}{12} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

したがって

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \cos^3 x \, dx = \frac{5\sqrt{2}}{12}}$$

p.61 問 3(1)

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x+1} f(2t) dt$$

を求めます。

一般に、連続関数 $g(t)$ に対して

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(t) dt$$

とおくと、

$$F'(x) = g(b(x))b'(x) - g(a(x))a'(x)$$

です。

今回は

$$g(t) = f(2t), \quad a(x) = -x, \quad b(x) = x + 1$$

です。

したがって

$$b'(x) = 1, \quad a'(x) = -1$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-x}^{x+1} f(2t) dt &= f(2(x+1)) \cdot 1 - f(2(-x)) \cdot (-1) \\ &= f(2x+2) + f(-2x) \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x+1} f(2t) dt = f(2x+2) + f(-2x)}$$

p.66 問 1(3)

$$\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx$$

分母に $2-x$ があるので、

$$u = 2 - x$$

とおきます。すると

$$du = -dx, \quad dx = -du$$

また

$$x = 2 - u$$

なので

$$x - 1 = 1 - u$$

です。したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx &= \int \frac{1-u}{u^3} (-du) \\ &= \int \frac{u-1}{u^3} du \\ &= \int (u^{-2} - u^{-3}) du\end{aligned}$$

それぞれ積分すると

$$\begin{aligned}\int u^{-2} du &= -u^{-1} \\ \int -u^{-3} du &= \frac{1}{2}u^{-2}\end{aligned}$$

したがって

$$\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C$$

元に戻して

$$\boxed{\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2(2-x)^2} + C}$$

p.66 問 2(2)

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$$

$\sqrt{x}$ が出ているので、

$$u = \sqrt{x}$$

とおきます。すると

$$x = u^2$$

なので

$$dx = 2u du$$

また

$$x\sqrt{x} = u^2 \cdot u = u^3$$

です。したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{u^3}{1+u} \cdot 2u du \\ &= 2 \int \frac{u^4}{u+1} du \end{aligned}$$

ここで多項式の割り算をします。

$$\frac{u^4}{u+1} = u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{u^4}{u+1} du &= 2 \int \left(u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= 2 \left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - u + \log|u+1| \right) + C \\ &= \frac{u^4}{2} - \frac{2u^3}{3} + u^2 - 2u + 2\log|u+1| + C \end{aligned}$$

ここで $u = \sqrt{x}$ に戻します。通常 $x \geq 0$ を考えるので $1 + \sqrt{x} > 0$ です。

$$\boxed{\int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + x - 2\sqrt{x} + 2\log(1+\sqrt{x}) + C}$$

p.66 問 3(2)

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx$$

これは半角置換を使います。

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

とおくと、

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

です。したがって

$$\begin{aligned} 2 + \cos x &= 2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ &= \frac{2(1 + t^2) + 1 - t^2}{1 + t^2} \\ &= \frac{3 + t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{(3 + t^2)/(1 + t^2)} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2 + 3} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2 + 3} dt \end{aligned}$$

ここで

$$t^2 + 3 = t^2 + (\sqrt{3})^2$$

なので、

$$\int \frac{1}{t^2 + 3} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

元に戻して

$$\boxed{\int \frac{1}{2 + \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + C}$$

ただし、この表示は $\tan(x/2)$ が定義される区間ごとの原始関数です。

p.72 問 1(1)

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

$x = 3$ で分母が 0 になるので、これは広義積分です。

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = \lim_{b \rightarrow 3-0} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

不定積分を求めると、

$$\int (3-x)^{-1/2} dx = -2\sqrt{3-x}$$

です。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= [-2\sqrt{3-x}]_0^b \\ &= -2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{b \rightarrow 3-0} (-2\sqrt{3-b} + 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

したがって

$$\boxed{\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = 2\sqrt{3}}$$

p.72 問 1(3)

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx$$

これは無限区間の広義積分です。

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x} dx$$

部分積分します。

$$u = x, \quad dv = e^{-x} dx$$

とおくと、

$$du = dx, \quad v = -e^{-x}$$

です。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^R x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^R + \int_0^R e^{-x} dx \\ &= -R e^{-R} + [-e^{-x}]_0^R \\ &= -R e^{-R} + (-e^{-R} + 1) \\ &= 1 - (R+1)e^{-R}\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (R+1)e^{-R} = 0$$

なので、

$$\boxed{\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1}$$

p.72 問 1(6)

$$\int_0^1 x \log x dx$$

$\log x$ は $x = 0$ で発散するので広義積分です。

$$\int_0^1 x \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 x \log x dx$$

部分積分します。

$$u = \log x, \quad dv = x dx$$

とおくと、

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

です。したがって

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 x \log x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

まず境界項は

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_{\varepsilon}^1 &= \frac{1}{2} \log 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \log \varepsilon \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \log \varepsilon \end{aligned}$$

また

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

したがって

$$\int_{\varepsilon}^1 x \log x \, dx = -\frac{\varepsilon^2}{2} \log \varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^2 \log \varepsilon = 0$$

なので、

$$\boxed{\int_0^1 x \log x \, dx = -\frac{1}{4}}$$

p.78 問 1(2)

曲線

$$y = \log x, \quad 1 \leq x \leq a$$

の長さを求めます。ここでは $a \geq 1$ とします。

曲線 $y = f(x)$ の長さは

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

で与えられます。

今回は

$$y = \log x$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

です。したがって

$$L = \int_1^a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx$$

$x > 0$ なので

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

です。よって

$$L = \int_1^a \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \, dx$$

ここで、原始関数として

$$\sqrt{x^2 + 1} + \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

が使えます。実際、これを微分すると

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

になります。

したがって

$$\begin{aligned} L &= \left[\sqrt{x^2 + 1} + \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right]_1^a \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{2} + \log \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1} + 1} - \log \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{2} + \log \frac{a(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{a^2 + 1} + 1} \end{aligned}$$

よって

$$L = \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{2} + \log \frac{a(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{a^2 + 1} + 1}$$

p.78 問 2(2)

曲線

$$x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

の長さを求めます。

媒介変数表示された曲線

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

の長さは

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられます。

今回は

$$x = 3t^2$$

なので

$$\frac{dx}{dt} = 6t$$

また

$$y = 3t - t^3$$

なので

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 3t^2 = 3(1 - t^2)$$

です。したがって速さは

$$\begin{aligned} & \sqrt{(6t)^2 + (3 - 3t^2)^2} \\ &= \sqrt{36t^2 + 9(1 - t^2)^2} \\ &= 3\sqrt{4t^2 + (1 - t^2)^2} \end{aligned}$$

ここで

$$4t^2 + (1 - t^2)^2 = 4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4 = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$$

なので、

$$3\sqrt{(t^2 + 1)^2} = 3(t^2 + 1)$$

です。 $t^2 + 1 > 0$ なので絶対値の問題はありません。

したがって

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} 3(t^2 + 1) dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (t^2 + 1) dt \\ &= 3 \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\pi/2} \\ &= [t^3 + 3t]_0^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

したがって

$$L = \frac{\pi^3}{8} + \frac{3\pi}{2}$$

答のまとめ

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \arctan(e^x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{1+3x} + C$$

$$\int_0^2 x^2 e^{2x} dx = \frac{5e^4 - 1}{4}$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^3 x dx = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x+1} f(2t) dt = f(2x+2) + f(-2x)$$

$$\int \frac{x-1}{(2-x)^3} dx = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2(2-x)^2} + C$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + x - 2\sqrt{x} + 2\log(1+\sqrt{x}) + C$$

$$\int \frac{1}{2+\cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = 2\sqrt{3}$$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^1 x \log x dx = -\frac{1}{4}$$

$$\text{曲線 } y = \log x, 1 \leq x \leq a \text{ の長さ} = \sqrt{a^2+1} - \sqrt{2} + \log \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{a^2+1}+1}$$

$$\text{曲線 } x = 3t^2, y = 3t - t^3, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ の長さ} = \frac{\pi^3}{8} + \frac{3\pi}{2}$$