

## 問題解答例 for section 2.1 (教科書 p.31)

### 問 1.(1)

$f(x) := (x^2+1)^5 * (x^3-1)^3$  に対し、その導関数を求めてください。計算過程も示してください。

### ChatGPT 回答

関数

$$f(x) = (x^2 + 1)^5(x^3 - 1)^3$$

の導関数を求めます。

これは 2 つの関数の積なので、積の微分法  $\{uv\}' = u'v + uv'$  を使います。ここで

$$u = (x^2 + 1)^5, \quad v = (x^3 - 1)^3$$

とおきます。

まず、それぞれを微分します。

$$u' = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x$$

したがって

$$u' = 10x(x^2 + 1)^4$$

また、

$$v' = 3(x^3 - 1)^2 \cdot 3x^2$$

なので

$$v' = 9x^2(x^3 - 1)^2$$

よって積の微分法より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= 10x(x^2 + 1)^4(x^3 - 1)^3 + (x^2 + 1)^5 9x^2(x^3 - 1)^2. \end{aligned}$$

したがって

$$f'(x) = 10x(x^2 + 1)^4(x^3 - 1)^3 + 9x^2(x^2 + 1)^5(x^3 - 1)^2$$

です。

さらに共通因子でくくると、

$$f'(x) = (x^2 + 1)^4(x^3 - 1)^2 \{10x(x^3 - 1) + 9x^2(x^2 + 1)\}.$$

中身を整理すると、

$$10x(x^3 - 1) + 9x^2(x^2 + 1) = 10x^4 - 10x + 9x^4 + 9x^2 = 19x^4 + 9x^2 - 10x.$$

なので、整理した形では

$$\boxed{f'(x) = (x^2 + 1)^4(x^3 - 1)^2(19x^4 + 9x^2 - 10x)}$$

です。

## 問 1.(9)

$f(x) := \sqrt{1 + 2 \log(x)}$  に対し、その導関数を求めてください。計算過程も示してください。

### ChatGPT 回答

関数

$$f(x) = \sqrt{1 + 2 \log x}$$

の導関数を求めます。

なお、この関数が実数値として定義されるには

$$1 + 2 \log x \geq 0$$

が必要なので、

$$\log x \geq -\frac{1}{2}$$

すなわち

$$x \geq e^{-1/2}$$

です。

さて、平方根を指数で書くと、

$$f(x) = (1 + 2 \log x)^{1/2}$$

です。合成関数の微分を使います。

$$\{g(x)^{1/2}\}' = \frac{1}{2}g(x)^{-1/2}g'(x)$$

ここで

$$g(x) = 1 + 2 \log x$$

とおきます。このとき、

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

です。

したがって,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1 + 2 \log x)^{-1/2} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{x}(1 + 2 \log x)^{-1/2}. \end{aligned}$$

よって,

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 + 2 \log x}}$$

です。

ただし導関数の式には分母に

$$\sqrt{1 + 2 \log x}$$

が現れるため、通常の意味で微分可能なのは

$$x > e^{-1/2}$$

の範囲です。

## 問 2.(1)

曲線  $y = x \cdot \log(x)$  の、 $x = 1$  での接線を求めてください。計算過程も示してください。

### ChatGPT 回答

曲線

$$y = x \log x$$

の  $x = 1$  における接線を求めます。

まず、接線を求めるには、その点での**点の座標**と**傾き**を求めればよいです。

**点の座標を求める:** まず、 $x = 1$  のときの  $y$  の値を求めます。

$$y = 1 \cdot \log 1$$

ここで

$$\log 1 = 0$$

なので、

$$y = 1 \cdot 0 = 0$$

です。したがって、接点は

$$(1, 0)$$

です。

**傾きを求める:** 次に、導関数を求めます。

$$y = x \log x$$

は積の形なので、積の微分法を使います。

$$(uv)' = u'v + uv'$$

ここで

$$u = x, \quad v = \log x$$

とおくと,

$$u' = 1, \quad v' = \frac{1}{x}$$

です。よって,

$$\begin{aligned} y' &= (x)' \log x + x(\log x)' \\ &= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1. \end{aligned}$$

したがって,  $x = 1$  における傾きは

$$y'(1) = \log 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

です。

**結果は…** : 点  $(1, 0)$  を通り, 傾きが 1 の直線は

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

なので,

$$y = x - 1$$

です。

したがって, 求める接線は

$$\boxed{y = x - 1}$$

です。