

p.19, 問の解答例

ユーザー

問 1(2). $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$ の値を求めてください.

chatGPT

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

は、「 $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる y 」を求める問題です。

ただし、 $\arcsin x$ の値域は通常

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

と定めます。

この範囲で

$$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる角は

$$y = -\frac{\pi}{3}$$

です。実際、

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となります。

したがって、

$$\boxed{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}}$$

ユーザー

問 2(1). $\arccos(x) = \arctan(\sqrt{5})$ を満たす x の値を求めてください.

chatGPT

$$\arccos(x) = \arctan(\sqrt{5})$$

とおきます。

$$\theta = \arctan(\sqrt{5})$$

とすると、

$$\tan \theta = \sqrt{5}$$

です。また、 $\sqrt{5} > 0$ なので

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

です。

いま

$$\arccos(x) = \theta$$

なので、

$$x = \cos \theta$$

を求めればよいです。

$$\tan \theta = \sqrt{5}$$

より、直角三角形で

$$\tan \theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \frac{\sqrt{5}}{1}$$

と考えると、斜辺は

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$

です。したがって

$$\cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

となります。

よって

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

です。分母を有理化すれば

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

とも書けます。

ユーザー

問 3(1). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}$ を求めてください。

chatGPT

求める極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}$$

です。

まず

$$y = (1 + ax)^{1/x}$$

とおき、両辺の自然対数を取ります。

$$\log y = \frac{1}{x} \log(1 + ax)$$

ここで、 $t = ax$ とおくと、 $x = \frac{t}{a}$ です。ただし $a = 0$ の場合はあとで別に見ます。

$$\frac{1}{x} \log(1 + ax) = \frac{a}{t} \log(1 + t) = a \frac{\log(1 + t)}{t}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $t = ax \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

を使うと、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log y = a$$

となります。

したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^a$$

です。

よって

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a}$$

です。

なお、 $a = 0$ のときは

$$(1 + ax)^{1/x} = 1^{1/x} = 1$$

なので、

$$e^0 = 1$$

と一致します。

ユーザー

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ であることを知っている、という立場だとどうなりますか。

chatGPT

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x}$$

について、

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

を既知としてよいなら、かなり直接的に計算できます。

まず $a \neq 0$ とします。 $t = ax$ とおくと、 $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ です。また

$$x = \frac{t}{a}$$

なので,

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{t}$$

です。したがって

$$(1 + ax)^{1/x} = (1 + t)^{a/t}$$

となります。これは

$$(1 + t)^{a/t} = \left\{ (1 + t)^{1/t} \right\}^a$$

と書けます。

ここで既知の極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e$$

を使うと,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1 + t)^{1/t} \right\}^a = e^a$$

です。

したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = \boxed{e^a}$$

となります。

なお, $a = 0$ のときは

$$(1 + ax)^{1/x} = 1^{1/x} = 1$$

なので,

$$\boxed{1 = e^0}$$

となり, 同じ結論

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a}$$

が成り立ちます。