

p.14, 問の解答例

ユーザー

問 1(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ の値を求めてください.

アシスタント

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

を求めます. 半角公式

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

を使うと,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{2}{x^2} \sin^2 \frac{x}{2}.$$

ここで $t = \frac{x}{2}$ とおくと, $x = 2t$ なので,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 t}{(2t)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2.$$

$x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であり,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

だから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

したがって答えは

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

です.

ユーザー

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を知らないという立場ならばどう計算しますか.

アシスタント

この極限は、実は $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ とかなり近い位置にある事実です。初学者向けには、「まず $\sin x/x$ を証明してから使う」か、「積分を使って直接出す」かのどちらかが自然です。

アシスタント

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

をまだ知らない立場なら、次のように **積分表示** を使うのが自然です。
求めたい極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

です。
ここで

$$1 - \cos x$$

を積分で表します。まず

$$1 - \cos x = \int_0^x \sin t \, dt$$

です。また

$$\sin t = \int_0^t \cos s \, ds$$

なので、

$$1 - \cos x = \int_0^x \int_0^t \cos s \, ds \, dt$$

となります。
積分の順序を入れ替えると、

$$1 - \cos x = \int_0^x (x - s) \cos s \, ds$$

です。ここで $s = xu$ と置換すると、

$$ds = x \, du$$

であり、

$$x - s = x - xu = x(1 - u)$$

なので、

$$1 - \cos x = x^2 \int_0^1 (1 - u) \cos(xu) \, du$$

となります。
したがって

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \int_0^1 (1 - u) \cos(xu) \, du.$$

ここで $x \rightarrow 0$ とすると、任意の $0 \leq u \leq 1$ に対して

$$xu \rightarrow 0$$

なので,

$$\cos(xu) \rightarrow \cos 0 = 1.$$

したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \int_0^1 (1 - u) \cdot 1 \, du.$$

あとは計算して,

$$\int_0^1 (1 - u) \, du = \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

です。

ただし注意点があります。この方法は

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

を使っています。もしこれらの導関数公式もまだ使えない段階なら、結局は幾何的な議論などで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

またはそれと同等の事実をどこかで証明する必要があります。つまり、この極限值 $\frac{1}{2}$ は、完全に無前提で出てくるというより、三角関数の 0 近傍での基本的な振る舞いから出てくる値です。

ユーザー

独立変数が複数の時の積分を知っていれば使える計算ですね。重積分等をまだ学習していないという学生の場合は他に解法はありますか？

アシスタント

はい、重積分を避けるなら **2 階の平均値の定理**、または**テイラーの定理の平均値型剰余**を使うのが一番すっきりします。これは実質的に「ロピタルを 2 回」よりも初学者向けに説明しやすいです。

アシスタント

はい、あります。**重積分を使わず、1 変数の微分だけで計算する**なら、次の方法が最も標準的です。使う道具は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

という **2 階の平均値の定理**です。ただし ξ は 0 と x の間のある値です。これはテイラーの定理の平均値型剰余とも呼ばれます。

今回、

$$f(x) = 1 - \cos x$$

とおきます。すると

$$f(0) = 1 - \cos 0 = 0,$$

また

$$f'(x) = \sin x$$

なので

$$f'(0) = \sin 0 = 0.$$

さらに

$$f''(x) = \cos x$$

です。

したがって、2階の平均値の定理より、0と x の間のある値 ξ が存在して

$$1 - \cos x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

となります。いま $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(\xi) = \cos \xi$ なので、

$$1 - \cos x = \frac{1}{2} \cos \xi x^2.$$

よって

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cos \xi.$$

ここで $x \rightarrow 0$ とすると、 ξ は0と x の間にあるので、

$$\xi \rightarrow 0$$

です。したがって

$$\cos \xi \rightarrow \cos 0 = 1.$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

したがって答えは

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

です。

この解法の良い点は、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を使わず、重積分も使わずに済むことです。ただし、

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$$

という三角関数の微分公式と、2階の平均値の定理は使っています。

なお、ロピタルの定理を既に知っているなら、同じ発想で

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

とも計算できます。ただし、初学者向けにはロピタルの定理よりも、2階の平均値の定理による説明の方が本質が見えやすいと思います。

ユーザー

なるほど、実質的には Taylor 展開の剰余項評価まで用いた形、ですね。納得しました。

アシスタント

はい、まさにその理解でよいと思います。
この問題の本質は

$$1 - \cos x$$

の $x = 0$ まわりの主要項が

$$\frac{x^2}{2}$$

であることを見る点にあります。つまり

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

または

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

が分かれば、ただちに

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

となります。
平均値型剰余を使った議論では、

$$1 - \cos x = \frac{1}{2} \cos \xi x^2$$

となり、 $\xi \rightarrow 0$ なので $\cos \xi \rightarrow 1$ 。したがって、これはまさに

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

を剰余項つきで保証している議論です。
したがって、学生さん向けに整理するなら、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

をまだ使わない場合には、

1. 三角関数の微分公式を知っている
 2. 2階の平均値の定理、または Taylor の定理を知っている
- という前提のもとで解く、という位置づけになります。

ユーザー

問 2(1) 関数 $f(x)$ を、 $\sin x/x$ ($x \neq 0$ の場合)、 1 ($x = 0$ の場合) と定義した場合、この関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続ですか？

アシスタント

はい、連続です。

関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義されています。

$x = 0$ で連続かどうかを調べるには、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

が成り立つかを確認すればよいです。

いま $x \neq 0$ のとき

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

ここで基本極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を使うと、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

一方で、定義より

$$f(0) = 1.$$

したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

が成り立つので、 $f(x)$ は $x = 0$ で連続です。

$f(x)$ は $x = 0$ で連続である。

ユーザー

問 3(2) 関数 $\cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$ は $(-\infty, \infty)$ で連続であることを示してください。

アシスタント

関数

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$$

が $(-\infty, \infty)$ で連続であることを示します。

まず、内側の関数

$$g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

を考えます。

分子 x^3 は多項式なので、すべての実数 x で連続です。また、分母

$$1+x^2$$

も多項式なので、すべての実数 x で連続です。

さらに、任意の実数 x に対して

$$1+x^2 > 0$$

であるため、分母は決して 0 になりません。

したがって、商の連続性より

$$g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

はすべての実数 x で連続です。

次に、 $\cos y$ はすべての実数 y で連続です。

よって、連続関数どうしの合成関数も連続であることから、

$$f(x) = \cos(g(x)) = \cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$$

はすべての実数 x で連続です。

したがって、

$\cos\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$ は $(-\infty, \infty)$ で連続である。
--