

教科書 p.9 問の解答例

ユーザー

問 1(1). $a_n = (1 - 1/n)^n$ のとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めてください.

ChatGPT

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

の極限は

$$\boxed{\frac{1}{e}}$$

です。

理由は、対数を取ると

$$\log a_n = n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

となります。ここで

$$x = \frac{1}{n}$$

とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow 0+$ であり、

$$n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\log(1-x)}{x}$$

です。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1-x)}{x}.$$

これは $\log x$ の微分を使うと

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1-x) - \log 1}{x} = -1$$

となります。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = -1.$$

指数関数の連続性より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

です。

ユーザー

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ であることを使って良い場合の解法はどうなりますか？

ChatGPT

既知の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

をを使ってよいなら、次のように変形するのが最も簡単です。

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}.$$

ここで

$$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

なので、

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n}.$$

指数の $-n$ を $-(n-1) - 1$ と分けると、

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \rightarrow e$$

かつ

$$1 + \frac{1}{n-1} \rightarrow 1$$

です。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

です。

ユーザー

問 1(2). $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ のとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めてください。

ChatGPT

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

です。このままだと極限を取りにくいので、有理化します。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

より、

$$a_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、分母は

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rightarrow \infty$$

となるので、

$$a_n \rightarrow 0.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

です。

ユーザー

問 2(1). $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ が「有界で、単調増加する」ことを示してください。

ChatGPT

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について、有界性と単調増加性を示します。

1. 有界であること

まず、すべての n に対して

$$a_n < 2$$

であることを示します。

初項については

$$a_1 = 1 < 2$$

です。

次に、ある n で

$$a_n < 2$$

が成り立つと仮定します。このとき

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$$

です。

したがって数学的帰納法により、すべての n について

$$a_n < 2$$

が成り立ちます。

また、 $a_1 = 1 > 0$ であり、漸化式から

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > 0$$

なので、すべての n について

$$a_n > 0$$

です。

よって

$$0 < a_n < 2$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ は有界です。

2. 単調増加すること

次に、 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示します。

まず

$$a_2 = \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{2}$$

なので、

$$a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$$

です。

ここで、ある n に対して

$$a_{n+1} \geq a_n$$

が成り立つと仮定します。

平方根関数 \sqrt{x} は単調増加関数なので、

$$1 + a_{n+1} \geq 1 + a_n$$

より

$$\sqrt{1 + a_{n+1}} \geq \sqrt{1 + a_n}$$

です。

したがって

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

が成り立ちます。

よって数学的帰納法により、すべての n について

$$a_{n+1} \geq a_n$$

です。

したがって、数列 $\{a_n\}$ は単調増加します。

以上より、

$\{a_n\}$ は有界で、単調増加する

ことが示されました。

ユーザー

問 2(2). $a_1 = 1, a_{n+1} = (3a_n + 4)/(2a_n + 3)$ のとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が「有界で、単調増加する」ことを示してください。

ChatGPT

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について、有界性と単調増加性を示します。

まず、関数

$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x + 3}$$

とおくと、

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

です。

1. 有界であること

まず、すべての n について

$$1 \leq a_n < \sqrt{2}$$

であることを示します。

初項については

$$a_1 = 1 < \sqrt{2}$$

なので成り立ちます。

次に、ある n について

$$1 \leq a_n < \sqrt{2}$$

が成り立つと仮定します。

このとき

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$$

です。まず $a_n > 0$ なので、分母 $2a_n + 3$ は正です。

上からの評価をします。示したいのは

$$a_{n+1} < \sqrt{2}$$

です。これは

$$\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} < \sqrt{2}$$

と同じです。分母が正なので両辺に $2a_n + 3$ をかけて、

$$3a_n + 4 < \sqrt{2}(2a_n + 3)$$

を示せばよいです。

移項すると、

$$3a_n + 4 < 2\sqrt{2}a_n + 3\sqrt{2}$$

です。これは

$$(2\sqrt{2} - 3)a_n + 3\sqrt{2} - 4 > 0$$

を意味しますが、少し見通しが悪いです。

そこで、関数 $f(x)$ が単調増加であることを使います。

実際、

$$f'(x) = \frac{1}{(2x + 3)^2} > 0$$

なので、 $f(x)$ は単調増加です。また、

$$f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2} + 4}{2\sqrt{2} + 3} = \sqrt{2}$$

です。したがって、 $a_n < \sqrt{2}$ ならば

$$a_{n+1} = f(a_n) < f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

となります。

また、 $a_n \geq 1$ ならば

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} \geq 1$$

です。実際、

$$\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} \geq 1$$

は

$$3a_n + 4 \geq 2a_n + 3$$

すなわち

$$a_n + 1 \geq 0$$

を意味し、これは明らかに成り立ちます。

よって数学的帰納法により、すべての n について

$$1 \leq a_n < \sqrt{2}$$

が成り立ちます。

したがって $\{a_n\}$ は有界です。

2. 単調増加すること

次に、

$$a_{n+1} > a_n$$

を示します。

漸化式より

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - a_n$$

です。通分すると、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4 - a_n(2a_n + 3)}{2a_n + 3}.$$

分子を整理すると、

$$3a_n + 4 - a_n(2a_n + 3) = 3a_n + 4 - 2a_n^2 - 3a_n = 4 - 2a_n^2.$$

したがって

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4 - 2a_n^2}{2a_n + 3} = \frac{2(2 - a_n^2)}{2a_n + 3}.$$

先ほど示したように

$$1 \leq a_n < \sqrt{2}$$

なので、

$$a_n^2 < 2$$

です。よって

$$2 - a_n^2 > 0.$$

また、

$$2a_n + 3 > 0$$

です。したがって

$$a_{n+1} - a_n > 0.$$

つまり

$$a_{n+1} > a_n$$

です。

以上より、

$\{a_n\}$ は有界で、単調増加する

ことが示されました。

ユーザー

問3. $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a)^{1/n} = 1$ となることを示してください。

ChatGPT

$a > 0$ とする。示したいのは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

です。

場合分けして示します。

1. $a = 1$ の場合

このとき

$$a^{1/n} = 1^{1/n} = 1$$

なので、明らかに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

です。

2. $a > 1$ の場合

$$x_n = a^{1/n} - 1$$

とおきます。

$a > 1$ なので

$$a^{1/n} > 1$$

であり、

$$x_n > 0$$

です。

また、

$$a^{1/n} = 1 + x_n$$

なので、両辺を n 乗して

$$a = (1 + x_n)^n$$

となります。

ここで二項定理より、 $x_n > 0$ なので

$$(1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots \geq 1 + nx_n$$

です。

したがって

$$a \geq 1 + nx_n$$

より、

$$nx_n \leq a - 1$$

すなわち

$$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$$

となります。

ここで

$$\frac{a-1}{n} \rightarrow 0$$

なので、はさみうちの原理より

$$x_n \rightarrow 0$$

です。

したがって

$$a^{1/n} - 1 \rightarrow 0$$

なので、

$$a^{1/n} \rightarrow 1$$

です。

3. $0 < a < 1$ の場合

このとき

$$b = \frac{1}{a}$$

とおくと、

$$b > 1$$

です。

2. で示した結果より、

$$b^{1/n} \rightarrow 1$$

です。

一方、

$$a^{1/n} = \left(\frac{1}{b}\right)^{1/n} = \frac{1}{b^{1/n}}$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

です。

以上より、すべての $a > 0$ に対して

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1}$$

が成り立ちます。