

一階常微分方程式解法



大阪大学の理系だが数学科ではない1年生に下記の内容をわかりやすく解説してください。

1. 一階の常微分方程式について、その解を導出するための下記の方法について:

1a. 変数分離形

1b. 同次形

1c. 一階線形常微分方程式に対する解の公式、および、それに帰着させて解くベルヌーイの常微分方程式

1d. 完全微分形、および、積分因子

2. 高階の定数係数かつ線形な常微分方程式についての解法の以下の点について:

2a. 問題の一般解が特解と斉次解の一般解との和で表せること

2b. 特解を求めるための公式、および演算子法のいくつかの公式

2c. 斉次解の一般解について

表示を増やす表示を減らす

内容が広いので、まず「形を見分ける → 変形する → 積分・代入で解く」という流れを軸に整理します。特に「同次形」と「斉次方程式」は名前が似ていますが別物なので、そこは意識して区別して説明します。

以下では、未知関数を $y = y(x)$ 、微分を

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

と書きます。

微分方程式の解法では、まず「どの型に属するか」を見抜きます。型がわかれば、ほとんどの場合は「置換」または「積分」によって解けます。

1. 一階の常微分方程式

一階の常微分方程式とは、未知関数 $y(x)$ とその一階微分 $y'(x)$ までを含む方程式です。

代表的には

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

の形をしています。

1a. 変数分離形

基本形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

のように、右辺が「 x だけの関数」と「 y だけの関数」の積に分かれているものを変数分離形といいます。このとき、形式的に

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$$

とし、

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

と書けます。両辺を積分して

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

となります。

例

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

を解きます。ただし $y \neq 0$ として進めると、

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x$$

より

$$\frac{1}{y} dy = x dx.$$

したがって

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

なので

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

よって

$$|y| = e^C e^{x^2/2}.$$

定数をまとめ直して

$$y = Ce^{x^2/2}$$

となります。

なお、最初に $y \neq 0$ としましたが、 $C = 0$ とすれば $y = 0$ も含まれるので、一般解は

$$y = Ce^{x^2/2}$$

です。

注意

変数分離で割り算をするとき、たとえば $g(y)$ で割るなら、 $g(y) = 0$ となる定数解を落としていないか注意が必要です。

1b. 同次形

ここでいう「同次形」は、あとで出てくる「線形方程式の斉次」とは別の意味です。

基本形

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形をしているものを、一階同次形といいます。

この場合は

$$v = \frac{y}{x}$$

と置きます。つまり

$$y = vx$$

です。ここで $v = v(x)$ は x の関数です。両辺を微分すると

$$y' = v + xv'$$

となります。

したがって、もとの方程式

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

は

$$v + xv' = F(v)$$

となります。よって

$$xv' = F(v) - v.$$

すなわち

$$\frac{dv}{dx} = \frac{F(v) - v}{x}$$

となり、これは変数分離形です。

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

として積分すればよいです。

例

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

を解きます。右辺は

$$\frac{x + y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

なので、同次形です。

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx$$

とおくと、

$$y' = v + xv'$$

です。方程式は

$$v + xv' = 1 + v$$

となります。したがって

$$xv' = 1$$

なので

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.$$

積分して

$$v = \log|x| + C.$$

$v = y/x$ だったので

$$\frac{y}{x} = \log|x| + C.$$

よって

$$y = x \log |x| + Cx$$

です。

1c. 一階線形常微分方程式とベルヌーイ方程式

一階線形常微分方程式

基本形は

$$y' + p(x)y = q(x)$$

です。

ここで、 y と y' が一次式として現れていることが重要です。たとえば y^2 、 $\sin y$ 、 yy' などが出てくると線形ではありません。

解の公式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

を解きます。

まず

$$P(x) = \int p(x) dx$$

とおきます。そして

$$\mu(x) = e^{P(x)}$$

とします。この $\mu(x)$ を積分因子といいます。

両辺に $\mu(x)$ をかけると

$$\mu y' + \mu p y = \mu q.$$

ここで

$$\mu' = p\mu$$

なので、左辺は積の微分になっています。

$$(\mu y)' = \mu q.$$

したがって

$$\mu y = \int \mu q dx + C.$$

よって

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu q dx + C \right).$$

すなわち

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right)$$

です。

例

$$y' + 2y = e^x$$

を解きます。

ここでは

$$p(x) = 2, \quad q(x) = e^x$$

です。

$$\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}.$$

両辺に e^{2x} をかけると

$$e^{2x} y' + 2e^{2x} y = e^{3x}.$$

左辺は

$$(e^{2x} y)'$$

なので

$$(e^{2x} y)' = e^{3x}.$$

積分して

$$e^{2x} y = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

したがって

$$y = \frac{1}{3} e^x + C e^{-2x}$$

です。

ベルヌーイの微分方程式

ベルヌーイ方程式とは

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

の形をした方程式です。ただし通常

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

を考えます。

これはそのままでは線形ではありません。なぜなら右辺に y^α があるからです。

しかし、適切な置換をすると一階線形方程式に変わります。

置換

$$z = y^{1-\alpha}$$

とおきます。

このとき

$$z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$$

です。

もとの方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

の両辺を y^α で割ると

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

ここで

$$z = y^{1-\alpha}$$

なので、

$$y^{-\alpha}y' = \frac{1}{1-\alpha}z'$$

です。したがって

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x).$$

両辺に $1 - \alpha$ をかけて

$$z' + (1 - \alpha)p(x)z = (1 - \alpha)q(x).$$

これは z に関する一階線形方程式です。

例

$$y' + y = xy^2$$

を解きます。

これは

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x, \quad \alpha = 2$$

のベルヌーイ方程式です。

$$z = y^{1-2} = y^{-1}$$

とおきます。

一般公式より

$$z' + (1 - 2)z = (1 - 2)x$$

なので

$$z' - z = -x.$$

これは一階線形方程式です。

$$z' - z = -x$$

を解くと、積分因子は

$$\mu = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

です。

したがって

$$(e^{-x}z)' = -xe^{-x}.$$

積分して

$$e^{-x}z = \int -xe^{-x} dx + C.$$

部分積分により

$$\int -xe^{-x} dx = (x + 1)e^{-x}$$

なので

$$e^{-x}z = (x + 1)e^{-x} + C.$$

したがって

$$z = x + 1 + Ce^x.$$

$z = y^{-1}$ なので

$$\frac{1}{y} = x + 1 + Ce^x.$$

よって

$$y = \frac{1}{x + 1 + Ce^x}$$

です。

1d. 完全微分形と積分因子

完全微分形

一階微分方程式を

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

と書くことがあります。

これが、ある関数 $\Phi(x, y)$ を用いて

$$d\Phi = 0$$

と書けるとき、完全微分形といいます。

つまり

$$d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy$$

なので、

$$M = \Phi_x, \quad N = \Phi_y$$

となるような Φ が存在すれば完全微分形です。

このとき

$$d\Phi = 0$$

なので、解は

$$\Phi(x, y) = C$$

です。

完全微分形の判定

もし

$$M = \Phi_x, \quad N = \Phi_y$$

ならば、十分な滑らかさのもとで

$$M_y = \Phi_{xy}, \quad N_x = \Phi_{yx}$$

です。

通常

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$$

なので、

$$\boxed{M_y = N_x}$$

が成り立ちます。

逆に、適切な領域、たとえば穴のない領域で

$$M_y = N_x$$

が成り立てば、完全微分形です。

例

$$(2xy + 1) dx + x^2 dy = 0$$

を考えます。

ここでは

$$M(x, y) = 2xy + 1, \quad N(x, y) = x^2.$$

計算すると

$$M_y = 2x, \quad N_x = 2x.$$

したがって

$$M_y = N_x$$

なので完全微分形です。

$$\Phi_x = M = 2xy + 1$$

となる Φ を探します。まず x で積分して

$$\Phi = \int (2xy + 1) dx = x^2 y + x + h(y).$$

ここで $h(y)$ は y だけの関数です。

次に

$$\Phi_y = x^2 + h'(y)$$

です。これが

$$N = x^2$$

に等しいので

$$h'(y) = 0.$$

したがって $h(y)$ は定数でよく、無視できます。

よって

$$\Phi = x^2y + x$$

です。したがって解は

$$x^2y + x = C$$

です。

積分因子

完全微分形でない方程式でも、ある関数 $\mu(x, y)$ をかけると完全微分形になることがあります。

つまり

$$M dx + N dy = 0$$

は完全ではないが、

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

が完全になることがあります。

この μ を積分因子といいます。

積分因子の条件

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

が完全微分形になる条件は

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

です。

一般に $\mu(x, y)$ を見つけるのは簡単ではありません。

ただし、 μ が x だけの関数、あるいは y だけの関数だと予想できる場合には公式があります。

$\mu = \mu(x)$ の場合

$$\mu = \mu(x)$$

と仮定します。このとき

$$(\mu M)_y = \mu M_y$$

であり、

$$(\mu N)_x = \mu' N + \mu N_x$$

です。

完全性の条件

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

より

$$\mu M_y = \mu' N + \mu N_x.$$

したがって

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}.$$

右辺が x だけの関数ならば、 $\mu(x)$ が求まります。

つまり

$$\frac{M_y - N_x}{N} \text{ が } x \text{ だけの関数なら、積分因子 } \mu(x) \text{ がある}$$

その場合

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right)$$

です。

$\mu = \mu(y)$ の場合

同様に、 $\mu = \mu(y)$ と仮定すると

$$\frac{N_x - M_y}{M} \text{ が } y \text{ だけの関数なら、積分因子 } \mu(y) \text{ がある}$$

その場合

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$

です。

2. 高階の定数係数線形常微分方程式

ここからは、たとえば

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

のような方程式を考えます。

係数 a_0, \dots, a_n は定数です。また、未知関数 y とその導関数がすべて一次式で現れているので線形です。

微分演算子

$$D = \frac{d}{dx}$$

を使うと、

$$y' = Dy, \quad y'' = D^2 y, \quad y^{(n)} = D^n y$$

と書けます。

そこで

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

とおくと、方程式は

$$P(D)y = f(x)$$

と書けます。

2a. 一般解は「特解 + 斉次解の一般解」

まず

$$P(D)y = f(x)$$

を考えます。

これに対応する斉次方程式は

$$P(D)y = 0$$

です。

ここで、ある一つの解 y_p が

$$P(D)y_p = f(x)$$

を満たしているとします。この y_p を特解といいます。

また、 y_h が

$$P(D)y_h = 0$$

を満たしているとします。この y_h を斉次解といいます。

すると、線形性により

$$P(D)(y_p + y_h) = P(D)y_p + P(D)y_h = f(x) + 0 = f(x)$$

です。

したがって

$$y = y_p + y_h$$

はもとの方程式の解です。

逆に、 y がもとの方程式の任意の解なら、

$$P(D)y = f(x)$$

であり、特解 y_p も

$$P(D)y_p = f(x)$$

を満たします。差を取ると

$$P(D)(y - y_p) = P(D)y - P(D)y_p = f(x) - f(x) = 0.$$

したがって

$$y - y_p$$

は斉次方程式の解です。

よって、任意の解 y は

$$y = y_p + y_h$$

と書けます。

つまり

$$\boxed{\text{一般解} = \text{特解} + \text{斉次方程式の一般解}}$$

です。

2b. 特解を求める公式と演算子法

方程式

$$P(D)y = f(x)$$

の特解を形式的に

$$y_p = \frac{1}{P(D)}f(x)$$

と書くことがあります。

これは本当に割り算をしているわけではなく、

$$P(D)y = f(x)$$

を満たす y を求める、という意味の記号です。

この考え方を演算子法といいます。

基本公式 1：指数関数に対する公式

指数関数 $e^{\lambda x}$ については

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

です。

さらに

$$D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

一般に

$$D^k e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}.$$

したがって

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}.$$

よって、もし

$$P(\lambda) \neq 0$$

ならば、

$$\boxed{\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x} = \frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda x}}$$

です。

例

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

を考えます。

ここで

$$P(D) = D^2 - 3D + 2.$$

したがって

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

右辺は e^{3x} なので $\lambda = 3$ とすると、

$$P(3) = 9 - 9 + 2 = 2.$$

したがって特解は

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

実際、

$$P(D) \left(\frac{1}{2}e^{3x} \right) = \frac{1}{2}P(3)e^{3x} = e^{3x}$$

です。

基本公式 2：指数関数を外に出す公式

任意の関数 $v(x)$ に対して

$$D(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}(D + \lambda)v$$

が成り立ちます。

したがって

$$P(D)(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}P(D + \lambda)v.$$

よって

$$\boxed{\frac{1}{P(D)}(e^{\lambda x}v(x)) = e^{\lambda x} \frac{1}{P(D + \lambda)}v(x)}$$

です。

この公式は、右辺が

$$e^{\lambda x} \times \text{多項式}$$

のような形をしているときに非常に便利です。

基本公式 3： $(D - a)^{-1}$ の公式

$$(D - a)y = f(x)$$

を解くことを考えます。

これは

$$y' - ay = f(x)$$

です。一階線形方程式なので、

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} f(x) dx$$

が特解になります。

したがって演算子記法では

$$\frac{1}{D-a} f(x) = e^{ax} \int e^{-ax} f(x) dx$$

と書けます。

積分定数を入れると斉次解も混ざるので、特解を求めるときは積分定数を一つ固定してよいです。

基本公式 4 : $(D - a)^{-m}$ の公式

同様に、

$$(D - a)^m y = f(x)$$

の特解は

$$\frac{1}{(D - a)^m} f(x) = e^{ax} \int \frac{(x - t)^{m-1}}{(m - 1)!} e^{-at} f(t) dt$$

という形で書けます。

これは厳密には積分範囲を決めて書くのが自然ですが、演算子法では「特解を一つ取る」という意味で使われます。

基本公式 5 : 三角関数は指数関数で考える

$$\cos bx, \quad \sin bx$$

は、複素指数関数

$$e^{ibx}$$

の実部・虚部として扱えます。

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx.$$

したがって、たとえば

$$P(D)y = \cos bx$$

の特解を考えるときは、まず

$$P(D)z = e^{ibx}$$

を解き、その実部を取ればよいです。

もし

$$P(ib) \neq 0$$

ならば

$$z_p = \frac{1}{P(ib)} e^{ibx}$$

です。

その実部が $\cos bx$ に対する特解、虚部が $\sin bx$ に対する特解になります。

共鳴の場合

注意が必要なのは

$$P(\lambda) = 0$$

となる場合です。

たとえば

$$P(D)y = e^{\lambda x}$$

を解きたいのに、 λ が斉次方程式の特性根になっていると、

$$\frac{1}{P(\lambda)}$$

が使いません。

この場合、右辺が斉次解と同じ形なので、特解の形が「共鳴」します。

そのときは、特解の候補に x をかけます。より一般に、 λ が特性方程式の m 重根なら、 x^m をかけます。

例

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

を考えます。

ここで

$$P(D) = D^2 - 3D + 2 = (D - 1)(D - 2).$$

右辺は e^x なので $\lambda = 1$ です。

しかし

$$P(1) = 0$$

です。つまり e^x は斉次解に含まれる形です。

この場合、特解を

$$y_p = Axe^x$$

とおきます。

実際に代入して求めると

$$A = -1$$

となり、

$$y_p = -xe^x$$

が特解です。

2c. 斉次解の一般解

斉次方程式

$$P(D)y = 0$$

を考えます。

ここで

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

です。

指数関数 $e^{\lambda x}$ を代入すると

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

なので、非自明な解になるためには

$$P(\lambda) = 0$$

が必要です。

この方程式

$$P(\lambda) = 0$$

を特性方程式といいます。

実数根の場合

特性方程式が異なる実数根

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

を持つとします。

このとき斉次解の一般解は

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

です。

例

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

では

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

したがって

$$\lambda = 1, \quad 2$$

です。

よって

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

です。

重解の場合

特性方程式が

$$(\lambda - a)^m = 0$$

のように、 $\lambda = a$ を m 重根にもつ場合、

$$e^{ax}, \quad x e^{ax}, \quad x^2 e^{ax}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{ax}$$

が解になります。

つまり

$$y_h = (C_0 + C_1 x + \dots + C_{m-1} x^{m-1}) e^{ax}$$

です。

例

$$y'' - 2y' + y = 0$$

では

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

したがって $\lambda = 1$ は二重根です。

よって

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

です。

複素根の場合

特性方程式が複素根

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

を持つと、係数が実数なら共役な根

$$\alpha - i\beta$$

も同時に現れます。

このとき、対応する実数値解は

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

です。

したがって、単根の場合は

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

となります。

例

$$y'' + y = 0$$

では

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

なので

$$\lambda = \pm i.$$

したがって

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

です。

複素重根の場合

$$\alpha \pm i\beta$$

が m 重根なら、

$$e^{\alpha x} [(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{m-1} x^{m-1}) \cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_{m-1} x^{m-1}) \sin \beta x]$$

の形になります。

全体のまとめ

一階方程式では、まず型を見ます。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

なら変数分離形です。

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

なら同次形で、

$$v = \frac{y}{x}$$

と置きます。

$$y' + p(x)y = q(x)$$

なら一階線形方程式で、積分因子

$$e^{\int p(x) dx}$$

をかけます。

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

ならベルヌーイ方程式で、

$$z = y^{1-\alpha}$$

と置いて一階線形方程式に直します。

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

で

$$M_y = N_x$$

なら完全微分形です。そうでない場合でも、積分因子をかけると完全形になることがあります。

高階の定数係数線形方程式では、

$$P(D)y = f(x)$$

と書き、

$$\boxed{\text{一般解} = \text{特解} + \text{斉次解の一般解}}$$

と考えます。

斉次解は特性方程式

$$P(\lambda) = 0$$

から求めます。

特解は演算子法で

$$y_p = \frac{1}{P(D)}f(x)$$

と考え、指数関数・三角関数・多項式に応じた公式や、未定係数法を使って求めます。