

積分の基礎解説



大阪大学の理系学部にいるが数学科ではない1年生に、 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の関数 $f(x)$ に対しての積分について、わかりやすく解説してください。内容的には、不定積分、定積分、置換積分、部分積分およびそれらに必要な各種公式となります。

以下は、大阪大学の理系学部1年生で、数学科ではない学生を想定した「1変数関数の積分」の入門的な説明です。微分の逆操作としての見方を中心にしつつ、定積分では「符号つき面積」「微小量の総和」という見方も入れます。

1. 積分とは何か

ここでは実数から実数への関数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

を考えます。

積分には大きく分けて2種類あります。

不定積分 $\int f(x) dx$

と

定積分 $\int_a^b f(x) dx$

です。

不定積分は「微分すると $f(x)$ になる関数を探すこと」です。

定積分は「区間 $[a, b]$ 上で $f(x)$ を足し合わせた量」です。

2. 不定積分

2.1 不定積分の定義

関数 $F(x)$ が

$$F'(x) = f(x)$$

を満たすとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といいます。

このとき

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と書きます。ここで C は任意定数です。

なぜ C が必要かというと、定数は微分すると消えるからです。

たとえば

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

ですが、

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3) = 2x, \quad \frac{d}{dx} (x^2 - 100) = 2x$$

でもあります。

したがって

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

です。

2.2 不定積分は「微分して確認する」

積分の計算では、最後に微分して確かめるのが非常に有効です。

たとえば

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

である理由は、

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

だからです。

つまり、不定積分の答えは、基本的には

微分したら元に戻るか？

で確認できます。

3. 基本公式

3.1 線形性

積分は和と定数倍に対して素直に振る舞います。

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

したがって

$$\int \{3x^2 + 2 \cos x\} dx = 3 \int x^2 dx + 2 \int \cos x dx$$

のように分けて計算できます。

3.2 べき関数の積分

$n \neq -1$ のとき、

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

です。

たとえば

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

です。

ただし、 $n = -1$ の場合だけ別です。

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

ここで絶対値が必要であることに注意します。

実際、

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$$

です。

3.3 指数関数・三角関数

よく使う公式は次の通りです。

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

4. 定積分

4.1 定積分の意味

定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

は、区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の値を足し合わせたものです。

直感的には、グラフ $y = f(x)$ と x -軸の間の符号つき面積です。

ただし「面積」と言うと常に正の量を想像しがちですが、定積分では $f(x) < 0$ の部分は負として数えます。
したがって

$$\int_a^b f(x) dx$$

は、正確には「符号つき面積」です。

4.2 微小量の総和としての定積分

区間 $[a, b]$ を細かく分け、幅を Δx とします。

各小区間での値を $f(x_i)$ とすると、小さな長方形の面積は

$$f(x_i)\Delta x$$

です。

これを全部足すと

$$\sum_i f(x_i) \Delta x$$

になります。

分割をどんどん細かくした極限が

$$\int_a^b f(x) dx$$

です。

つまり定積分は

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x$$

という「連続的な足し算」です。

5. 微分積分学の基本定理

積分計算で最も重要なのが、微分積分学の基本定理です。

$F'(x) = f(x)$ であるとき、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

です。

これをよく

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

と書きます。

つまり、定積分を計算するときは、

1. まず原始関数 $F(x)$ を求める。
2. $F(b) - F(a)$ を計算する。

という流れになります。

例

$$\int_0^2 x^2 dx$$

を求めます。

まず

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

なので、原始関数として

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

を取ります。

したがって

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

です。

6. 定積分の基本性質

定積分にも線形性があります。

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

また、積分区間について

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

が成り立ちます。

向きを逆にすると符号が変わります。

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

特に

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

です。

7. 置換積分

7.1 置換積分の考え方

置換積分は、合成関数の微分の逆です。

合成関数の微分は

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

でした。

ここで $F'(u) = f(u)$ とすると、

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$

です。

したがって

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

となります。

これが置換積分の本質です。

7.2 不定積分における置換積分

たとえば

$$\int 2x \cos(x^2) dx$$

を考えます。

ここで

$$u = x^2$$

と置くと、

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

なので

$$du = 2x dx$$

と形式的に書けます。

すると

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(x^2) + C$$

です。

確認すると、

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

なので正しいです。

7.3 置換積分の典型例

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

を考えます。

分母に $1+x^2$ があり、その微分が $2x$ です。そこで

$$u = 1 + x^2$$

と置くと、

$$du = 2x dx$$

です。

したがって

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{u} du = \log |u| + C = \log(1+x^2) + C$$

です。

ここでは $1+x^2 > 0$ なので、最後は $\log(1+x^2)$ と書いて構いません。

7.4 定積分における置換積分

定積分で置換するときは、積分範囲も変えます。

たとえば

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

を考えます。

先ほどと同じく

$$u = 1 + x^2$$

と置きます。

このとき

$$du = 2x \, dx$$

です。

積分範囲は次のように変わります。

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 2$$

したがって

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{u} \, du = [\log u]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

です。

定積分では、置換した後に x に戻さず、新しい範囲でそのまま計算できます。

8. 部分積分

8.1 部分積分の考え方

部分積分は、積の微分公式の逆です。

積の微分は

$$(uv)' = u'v + uv'$$

です。

これを積分すると

$$uv = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx$$

となります。

したがって

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

です。

普通は

$$\int u v' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

と書きます。

また、 $v' dx = dv$ と書く記法を使うと、

$$\int u dv = uv - \int v du$$

です。

8.2 不定積分における部分積分

例として

$$\int x e^x dx$$

を計算します。

ここで

$$u = x, \quad v' = e^x$$

とします。

すると

$$u' = 1, \quad v = e^x$$

です。

部分積分公式より

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

したがって

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

です。

確認すると、

$$\frac{d}{dx} \{(x - 1)e^x\} = 1 \cdot e^x + (x - 1)e^x = x e^x$$

なので正しいです。

8.3 定積分における部分積分

定積分では

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

です。

例として

$$\int_0^1 xe^x dx$$

を計算します。

先ほどと同じく

$$u = x, \quad v' = e^x$$

と置きます。

すると

$$u' = 1, \quad v = e^x$$

なので

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

です。

まず

$$[xe^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 = e$$

また

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

したがって

$$\int_0^1 xe^x dx = e - (e - 1) = 1$$

です。

9. 置換積分と部分積分の使い分け

大まかな目安は次の通りです。

置換積分は、関数の中にさらに関数が入っていて、その微分が近くにあるときに使います。

たとえば

$$\int 2x \cos(x^2) dx$$

では、 x^2 の微分 $2x$ が外にあります。

したがって置換積分が自然です。

一方、部分積分は、積の形になっていて、一方を微分すると簡単になり、もう一方を積分できるときに使います。

たとえば

$$\int x e^x dx$$

では、 x は微分すると 1 になって簡単になります。

一方、 e^x は積分しても e^x のままです。

したがって部分積分が有効です。

10. よく使う「少し発展的な形」

10.1 一次式のべき

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1)$$

これは置換積分で得られます。

例：

$$\int (3x + 1)^4 dx = \frac{(3x + 1)^5}{3 \cdot 5} + C = \frac{(3x + 1)^5}{15} + C$$

10.2 一次式の逆数

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \log |ax + b| + C$$

例：

$$\int \frac{1}{2x + 3} dx = \frac{1}{2} \log |2x + 3| + C$$

10.3 指数関数の中身が一次式

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad (a \neq 0)$$

例：

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

10.4 三角関数の中身が一次式

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

例：

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

11. 計算の基本方針

積分問題では、次の順番で考えるとよいです。

まず、基本公式だけで計算できるかを見る。

たとえば

$$\int (3x^2 + 2x + 1) dx$$

なら項別に積分できます。

次に、合成関数の形を探します。

たとえば

$$\int 2xe^{x^2} dx$$

なら

$$u = x^2$$

と置換できます。

次に、積の形を見ます。

たとえば

$$\int x \cos x dx$$

なら部分積分を考えます。

最後に、答えを微分して確認します。

不定積分では、これは特に重要です。

12. まとめ

不定積分は

$$\int f(x) dx$$

という形で、微分すると $f(x)$ になる関数を求める操作です。

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

は

$$F'(x) = f(x)$$

を意味します。

定積分は

$$\int_a^b f(x) dx$$

という形で、区間 $[a, b]$ 上で $f(x)$ を連続的に足し合わせた量です。

原始関数 F がわかれば、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

で計算できます。

置換積分は合成関数の微分の逆で、

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

です。

部分積分は積の微分の逆で、

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

です。

積分の公式はたくさんありますが、中心にある考え方はかなり少なく、

微分の逆

合成関数の微分の逆

積の微分の逆

の3つです。

この3つを意識すると、単なる公式暗記ではなく、見通しを持って積分計算ができるようになります。