

# Taylor 展開の基本



□

私は大阪大学の理系学部に所属する 1 年生です。ただし数学科ではありません。そして、微積分学の授業で Taylor 展開について学ぶところです。そこで、Taylor 展開について、ぜひ知っておくべき知識、応用例などがありましたら教えてください。ただし、定義域も値域も  $\mathbb{R}^1$  です。

Taylor 展開は、一言でいうと、

なめらかな関数を、ある点の近くで多項式によって近似する方法

です。微積分学の中でも非常に重要で、計算・物理・工学・数値解析・統計などで広く使われます。

## 1. Taylor 展開の基本的な考え方

関数  $f(x)$  を、ある点  $x = a$  の近くで調べたいとします。

そのとき、 $f(x)$  を

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

のように表すのが Taylor 展開です。

より一般に、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

と書ける場合、これを **点  $a$  のまわりの Taylor 展開** といいます。

特に  $a = 0$  の場合は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

となり、これを **Maclaurin 展開** と呼ぶこともあります。

## 2. まず知っておくべき代表例

Taylor 展開では、次の基本公式が非常に重要です。

### 指数関数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

## 三角関数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

## 対数関数

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ただし、これは典型的には  $-1 < x \leq 1$  の範囲で注意して使います。

## 二項展開型

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

例えば、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

となります。

## 3. 何がうれしいのか

Taylor 展開の本質は、

難しい関数 → 多項式で近似する

という点にあります。

多項式は、足し算・掛け算・微分・積分がしやすいので、複雑な関数を扱うときに非常に便利です。

例えば、 $x$  が十分小さいとき、

$$\sin x \approx x$$

と近似できます。さらに精度を上げるなら、

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

とします。

また、

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

もよく使われます。

物理では、小さな振動や小さな角度を扱うときに

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

という近似が頻繁に現れます。

## 4. 具体例： $\sin x$ の近似

例えば、 $x = 0.1$  のとき、

$$\sin(0.1)$$

を考えます。

Taylor 展開より、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

なので、

$$\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.1 - \frac{0.001}{6} = 0.0998333\dots$$

となります。

実際、

$$\sin(0.1) \approx 0.0998334$$

なので、かなり良い近似になっています。

## 5. Taylor 展開と接線・二次近似

Taylor 展開の最初の部分だけを見ると、

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

です。

これは、点  $x = a$  における接線の式です。

つまり、Taylor 展開の一次近似は、

関数を接線で近似する

ことに対応しています。

さらに二次まで使うと、

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

となります。

これは、関数を放物線で近似することに対応します。

ここで  $f''(a)$  は、グラフの曲がり方、つまり凸性・凹性に関係します。

## 6. 極限計算への応用

Taylor 展開は、極限計算で非常に強力です。

例えば、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

を考えます。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

なので、

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

と分かります。

また、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

では、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

より、

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots$$

したがって、

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots$$

となるので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

です。

## 7. 近似の精度と剰余項

Taylor 展開では、「どこまで近似すればどれくらい正確か」が大事です。

有限個で打ち切ったものを Taylor 多項式と呼びます。例えば、

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

は、 $\sin x$  の 3 次 Taylor 多項式による近似です。

しかし本当は、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \text{誤差}$$

です。

この誤差を **剰余項** と呼びます。

授業では、おそらく

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

という形が出てくると思います。

ここで  $R_n(x)$  が剰余項です。

大切なのは、

$R_n(x)$  が小さいなら、Taylor 多項式は良い近似になる

ということです。

## 8. 「Taylor 展開できる」と「Taylor 展開が元の関数に一致する」は別問題

ここは少し注意が必要です。

関数が何回でも微分可能であっても、その Taylor 展開が必ず元の関数に一致するとは限りません。

つまり、

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

のように形式的に展開できても、それが本当に

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

を満たすとは限りません。

大学初年級では、まずは代表的な関数

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \log(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

について正しく使えるようになることが重要です。

## 9. 物理・工学での応用例

### 小さい角度の近似

角度  $x$  が小さいとき、

$$\sin x \approx x$$

が使えます。

単振り子の運動では、本来は

$$\sin \theta$$

が出てきますが、小さい振幅では

$$\sin \theta \approx \theta$$

と近似することで、方程式が簡単になります。

### ポテンシャルの二次近似

ある安定点  $x = a$  の近くで、エネルギー関数  $V(x)$  を Taylor 展開すると、

$$V(x) \approx V(a) + \frac{V''(a)}{2} (x-a)^2$$

のようになります。

もし  $a$  が極小点なら、普通は  $V'(a) = 0$  です。

この形は、ばねのエネルギー

$$\frac{1}{2} kx^2$$

に似ています。

そのため、多くの物理現象は、安定点の近くでは「ばねのような振動」として近似できます。

## 数値計算での応用

コンピュータで関数を計算するときにも Taylor 展開の考え方は使われます。

例えば、 $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$  などの関数は、内部的には多項式近似や有理関数近似などを使って高速に計算されることがあります。

また、数値微分や数値積分の誤差解析でも Taylor 展開は基本的な道具です。

例えば、

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

を使うと、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \dots$$

となります。

したがって、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は  $f'(x)$  の近似になっているが、一般には  $h$  に比例する誤差を持つ、ということが分かります。

## 10. 学ぶときの要点

Taylor 展開について、最初に押さえるべき点は次の通りです。

1. Taylor 展開は、関数を多項式で近似する方法である。
2. 一次近似は接線による近似である。
3. 二次近似は曲がり方まで反映した近似である。
4.  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$  の展開は特に重要である。
5. 極限計算に非常に有効である。
6. 近似には誤差があり、その誤差を剰余項として評価する。
7. 何回でも微分可能だからといって、必ず Taylor 展開が元の関数に一致するとは限らない。

## 11. 最初に覚えるとよい公式まとめ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Taylor 展開は、最初は「公式がたくさん出てくる分野」に見えるかもしれませんが、本質はかなり単純です。

**関数を、ある点の近くで、できるだけよく似た多項式に置き換える**

という考え方です。

その意味では、Taylor 展開は「微分係数を使って関数の局所的な形を復元する方法」と理解するとよいです。