高階微分の基本

私は大阪大学の理系学部に所属する 1年生です．ただし数学科ではありません．そして、微積分学の授業で高階微分について学ぶところです．そこで、高階微分について、ぜひ知っておくべき知識、応用例などがありましたら教えてください．なお、Taylor 展開は次回の授業で学ぶ予定です．

高階微分は、ひとことで言えば

「変化率」がさらにどう変化しているかを調べる道具

です。1階微分が「傾き・速度」を表すのに対して、2階微分、3階微分……は、その変化のしかたをさらに詳しく表します。Taylor 展開の前に高階微分を学ぶのは自然で、Taylor 展開ではまさに高階微分が中心的な役割を果たします。

---

1. 高階微分とは何か

関数 $f(x)$ の導関数を

$$f'(x)$$

と書きます。これをさらに微分したものを

$$f''(x)$$

と書き、これを **2階導関数** と呼びます。

さらに微分していくと、

$$f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \ldots$$

のようになります。一般に、n 回微分したものを

$$f^{(n)}(x)$$

と書きます。

たとえば

$$f(x) = x^5$$

ならば、

$$f'(x) = 5x^4,$$

$$f''(x) = 20x^3,$$

$$f'''(x) = 60x^2,$$

$$f^{(4)}(x) = 120x,$$

$$f^{(5)}(x) = 120,$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

となります。

---

2. 1階微分、2階微分、3階微分の意味

1階微分：増え方・傾き・速度

$$f'(x)$$

は、関数 $f(x)$ のその点での増え方を表します。

物理で位置を $x(t)$ と書くなら、

$$x'(t)$$

は速度です。

2階微分：増え方の変化・曲がり方・加速度

$$f''(x)$$

は、傾き $f'(x)$ がどう変化しているかを表します。

物理で位置 $x(t)$ を考えると、

$$x''(t)$$

は加速度です。

たとえば、車の位置が時間 t の関数 $x(t)$ で表されるとします。

$$x'(t) = \text{速度},$$

$$x''(t) = \text{加速度}.$$

つまり、2階微分は「速度が増えているか、減っているか」を表します。

3階微分：加速度の変化

位置 $x(t)$ に対して

$$x'''(t)$$

は、加速度の変化率を表します。これは物理や工学では **ジャーク** と呼ばれることがあります。

車や電車に乗っているとき、加速度そのものよりも「加速度が急に変わるかどうか」が乗り心地に大きく影響します。

たとえば、速度が急に変わると不快ですが、加速度が急に変わっても不快になります。したがって、鉄道・自動車・ロボット制御などでは、3階微分に相当する量も重要になります。

---

3. 2階微分とグラフの形

高階微分の中でも、特に重要なのは **2階微分** です。

関数 $f(x)$ に対して、

$$f''(x) > 0$$

ならば、グラフは下に凸です。つまり、お椀のような形になります。

一方で、

$$f''(x) < 0$$

ならば、グラフは上に凸です。つまり、山のような形になります。

たとえば、

$$f(x) = x^2$$

では

$$f'(x) = 2x,$$

$$f''(x) = 2.$$

常に

$$f''(x) > 0$$

なので、グラフは下に凸です。

一方、

$$f(x) = -x^2$$

では

$$f'(x) = -2x,$$

$$f''(x) = -2.$$

常に

$$f''(x) < 0$$

なので、グラフは上に凸です。

---

4. 極大・極小の判定

高階微分は、関数の最大・最小を調べるときにも重要です。

たとえば、ある点 $x = a$ で

$$f'(a) = 0$$

となったとします。このような点は、極大・極小の候補です。

このとき、さらに

$$f''(a) > 0$$

ならば、$x = a$ で極小になります。

一方、

$$f''(a) < 0$$

ならば、$x = a$ で極大になります。

例として、

$$f(x) = x^2$$

を考えると、

$$f'(x) = 2x$$

なので、

$$f'(0) = 0.$$

また、

$$f''(x) = 2$$

なので、

$$f''(0) = 2 > 0.$$

したがって、$x = 0$ で極小です。

一方、

$$f(x) = -x^2$$

では、

$$f'(x) = -2x,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -2,$$

$$f''(0) = -2 < 0.$$

したがって、$x = 0$ で極大です。

5. 2階微分が 0 のときは注意

ただし、

$$f'(a) = 0, \qquad f''(a) = 0$$

となった場合には、2階微分だけでは極大・極小を判定できません。

たとえば、

$$f(x) = x^3$$

では、

$$f'(x) = 3x^2,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 6x,$$

$$f''(0) = 0.$$

しかし $x = 0$ は極大でも極小でもありません。グラフは原点を通って単調に増加します。

一方、

$$f(x) = x^4$$

では、

$$f'(x) = 4x^3,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 12x^2,$$

$$f''(0) = 0.$$

この場合は $x = 0$ で極小です。

つまり、2階微分が 0 のときには、さらに高い階数の微分を見る必要があります。

6. 変曲点

2階微分は、グラフの曲がり方を見るためにも使います。

グラフが

$$\text{下に凸}$$

から

$$\text{上に凸}$$

へ変わったり、逆に

$$\text{上に凸}$$

から

$$\text{下に凸}$$

へ変わったりする点を **変曲点** といいます。

変曲点の候補は

$$f''(x) = 0$$

となる点です。

たとえば、

$$f(x) = x^3$$

では、

$$f''(x) = 6x.$$

したがって、

$$f''(0) = 0.$$

また、$x < 0$ では

$$f''(x) < 0,$$

$x > 0$ では

$$f''(x) > 0.$$

つまり、$x = 0$ を境にグラフの曲がり方が変わります。したがって、原点は変曲点です。

---

7. Taylor 展開との関係

次回学ぶ Taylor 展開では、高階微分が本格的に使われます。

直感的に言うと、Taylor 展開は

$$\text{関数を多項式で近似する方法}$$

です。

たとえば、ある点 $x = a$ の近くで、関数 $f(x)$ を

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \quad f'''(a), \dots$$

の情報を使って近似します。

大雑把に言えば、

$$f(a)$$

は関数の値、

$$f'(a)$$

はその点での傾き、

$$f''(a)$$

はその点での曲がり方、

$$f'''(a)$$

は曲がり方の変化、

という情報を与えます。

つまり Taylor 展開は、「関数の一点での値と、そのまわりでの変化の情報」を使って、関数全体を近似しようとする考え方です。

---

8. 応用例

物理：運動の記述

位置を $x(t)$ とすると、

$$x'(t) = \text{速度},$$
$$x''(t) = \text{加速度}$$

です。

ニュートンの運動方程式

$$mx''(t) = F$$

にも 2階微分が出てきます。これは、力が加速度を決めるという式です。

工学：振動や波

ばねにつながれた物体の運動では、典型的に

$$x''(t) = -kx(t)$$

のような式が現れます。

この式は、「位置 $x(t)$」と「加速度 $x''(t)$」の関係を表しています。

このように、2階微分を含む方程式は、振動、波、電気回路、建物の揺れなどのモデルに現れます。

経済・最適化：最大・最小の判定

ある利益関数や費用関数を考えるとき、

$$f'(x) = 0$$

となる点は、利益が最大になる候補や費用が最小になる候補になります。

さらに、

$$f''(x) > 0$$

なら極小、

$$f''(x) < 0$$

なら極大、

という判定が使えます。

これは理学・工学だけでなく、経済学やデータ解析でも使われます。

データ解析・機械学習：曲率と最適化

機械学習では、損失関数と呼ばれる関数を最小化します。

そのとき、1階微分は「どちらに進めば値が下がるか」を教えてくれます。

一方で、2階微分は「どれくらい曲がっているか」を教えてくれます。

2階微分の情報を使うと、単に坂を下るだけでなく、グラフの曲がり方も考慮して効率よく最小値を探すことができます。

---

9. 高階微分で特に覚えておくとよいこと

まず重要なのは、次の対応です。

$$f'(x) : \text{傾き・変化率}$$

$$f''(x) : \text{曲がり方・加速度}$$

$$f'''(x) : \text{曲がり方や加速度の変化}$$

また、

$$f''(x) > 0$$

なら下に凸、

$$f''(x) < 0$$

なら上に凸です。

さらに、

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0$$

なら極小、

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$$

なら極大です。

ただし、

$$f''(a) = 0$$

のときは、それだけでは判定できません。

---

10. 学ぶときの見方

高階微分を単なる計算規則として覚えるだけだと、少し退屈に感じるかもしれません。

しかし、高階微分は

関数の形をより細かく見るための道具

です。

1階微分で「増えているか、減っているか」を見ます。

2階微分で「どちら向きに曲がっているか」を見ます。

3階微分以降で「その曲がり方がどう変化しているか」を見ます。

そして次に学ぶ Taylor 展開では、これらの情報を組み合わせて、関数を多項式で近似します。

したがって、高階微分は

グラフの形を理解する

最大・最小を調べる

物理現象を表す

関数を近似する

ための基本的な道具だと思うとよいです。