平均値の定理の応用

大学1年の微積分学で学ぶ「平均値の定理」がありますね．この定理が適用される実際の応用例などはありますか？

はい、あります。平均値の定理は一見「グラフ上のどこかで接線の傾きが割線の傾きに等しい」という抽象的な定理に見えますが、実際には

> **全体としての変化量を、どこか一瞬の変化率で説明できる**

という意味を持つので、応用範囲はかなり広いです。

平均値の定理は、典型的には次の形です。

$$f \text{ が } [a,b] \text{ で連続，} (a,b) \text{ で微分可能ならば，ある } c \in (a,b)$$

が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となる。

---

1. 自動車の速度：平均速度と瞬間速度

最も直感的な応用は運動です。

ある車が時刻 a から b までに位置 $f(a)$ から $f(b)$ まで移動したとします。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

は平均速度です。一方、

$$f'(t)$$

は時刻 t における瞬間速度です。

平均値の定理は、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となる時刻 c が少なくとも一つ存在する、と言っています。

つまり、

> ある区間での平均速度とちょうど同じ瞬間速度を出していた時刻が、必ずどこかにある。

ということです。

たとえば、車が1時間で60 km進んだなら、途中のどこかの瞬間には時速60 kmで走っていた、という主張です。これは物理的にも自然ですが、数学的には平均値の定理がそれを保証しています。

---

2. スピード違反の理屈

これもかなり実用的です。

たとえば、高速道路で2地点間の距離が 100 km あり、そこを50分で通過したとします。平均速度は

$$\frac{100}{50/60} = 120$$

なので、時速120 kmです。

もし制限速度が時速100 kmなら、平均値の定理により、途中のどこかの瞬間では少なくとも時速120 kmに達していたことになります。したがって、

> 途中で必ず制限速度を超えていた

と結論できます。

これは「全区間の移動時間と距離」から「途中のどこかでの瞬間速度」を推論する例です。

---

3. 関数の増減判定

平均値の定理は、微分を使って関数の増減を判定するときの基礎です。

たとえば、ある区間で常に

$$f'(x) > 0$$

ならば、平均値の定理により、任意の $a < b$ に対して

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

となる $c \in (a, b)$ が存在します。

ここで

$$f'(c) > 0, \qquad b - a > 0$$

なので、

$$f(b) - f(a) > 0$$

すなわち

$$f(a) < f(b)$$

です。したがって、f は単調増加です。

つまり、よく使う

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ は増加}$$

という事実は、平均値の定理から出ています。

これは経済学、物理、工学などで「ある量が増えるか減るか」を判定するときの基本原理です。

---

4. 誤差評価：入力誤差が出力にどれくらい効くか

平均値の定理は、誤差評価にも非常によく使われます。

たとえば、ある量 x を測定したつもりが、実際には少しずれて $x+h$ だったとします。関数値の誤差は

$$f(x+h) - f(x)$$

です。平均値の定理を使うと、ある c が存在して

$$f(x+h) - f(x) = f'(c)h$$

となります。

したがって、

$$|f(x+h) - f(x)| = |f'(c)|\,|h|$$

です。

もしその範囲で

$$|f'(x)| \le M$$

がわかっていれば、

$$|f(x+h) - f(x)| \le M|h|$$

となります。

これは、

> 入力の誤差が $|h|$ なら、出力の誤差は高々その M 倍である

という評価です。

たとえば数値計算、測定誤差、近似計算、工学設計などで非常に重要です。

---

5. 近似式の正当化

高校や大学初年級でよく使う近似式

$$\sin x \approx x$$

や

$$\log(1+x) \approx x$$

なども、平均値の定理によって誤差評価できます。

たとえば

$$f(x) = \sin x$$

について考えると、

$$\sin x - \sin 0 = \cos c\,(x-0)$$

となる c が 0 と x の間に存在します。したがって

$$\sin x = x \cos c$$

です。

$\cos c$ が 1 に近い範囲では、

$$\sin x \approx x$$

が正当化されます。

また、

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

という評価も、平均値の定理からすぐに出ます。これは波動、信号処理、数値計算などでもよく使われる基本評価です。

---

6. 解の一意性の証明

方程式の解が一つしかないことを示すときにも使います。

たとえば、関数 f が区間全体で

$$f'(x) > 0$$

を満たしているとします。このとき f は単調増加なので、方程式

$$f(x) = 0$$

は高々一つしか解を持ちません。

実際、もし異なる2つの解 $a < b$ があったとすると、

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0$$

なので、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

です。平均値の定理により、ある $c \in (a, b)$ で

$$f'(c) = 0$$

となります。しかしこれは $f'(x) > 0$ に反します。

したがって、解は二つ以上存在できません。

これは数学だけでなく、物理モデルや工学モデルで「平衡状態が一つしかない」ことを示すときにも使われます。

---

7. 数値計算での誤差評価

数値解析でも平均値の定理は基本的です。

たとえば、微分を差分で近似するとき、

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を使います。この右辺は、平均値の定理によれば

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(c)$$

となる $c \in (x, x+h)$ が存在します。

つまり、差分商は「どこか少しずれた点での微分係数」と一致します。

これを出発点にして、より精密にはテイラー展開を使って

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

のような誤差評価を行います。平均値の定理は、そのような誤差解析の基礎になっています。

---

8. 「変化量 = 微分係数 × 幅」という考え方

平均値の定理は、次の形に書き換えると応用しやすいです。

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

これは、

> 関数値の変化量は、どこかの点での変化率に、区間の長さをかけたものである

という意味です。

この形は、物理や工学で頻繁に現れます。

たとえば温度、圧力、人口、売上、コスト、濃度など、何らかの量 $f(x)$ が変化するとき、

$$\text{全体の変化量} = \text{どこかでの変化率} \times \text{変化させた幅}$$

と見なせる、ということです。

まとめ

平均値の定理の実際的な意味は、かなり素朴に言えば次です。

平均的な変化率は、どこかの瞬間的な変化率として実現される。

そのため、応用例としては次のようなものがあります。

応用場面	平均値の定理がしていること
自動車の運動	平均速度と同じ瞬間速度がどこかにあることを保証する
スピード違反の推定	区間平均から途中の瞬間速度を推論する
関数の増減	$f'(x) > 0$ なら単調増加であることを示す
誤差評価	入力誤差が出力誤差にどう影響するかを評価する
近似計算	$\sin x \approx x$ などの妥当性を支える
方程式の解の一意性	解が二つ以上ないことを示す
数値計算	差分近似や誤差解析の基礎になる

したがって、平均値の定理は「それ自体を直接使って何かを計算する定理」というよりも、

微分係数という局所的な情報と、関数値の差という大域的な情報を結びつけるための基本定理

と見ると、その重要性がかなりはっきりします。