

導関数の導出方法



関数 $y(x) = \log(x)$ の導関数が $1/x$ になることを、この $y(x)$ が $y(x) = \exp(x)$ の逆関数であることから導出してください。

$y = \log x$ は $y = \exp x$ の逆関数なので、

$$y = \log x$$

とは

$$x = \exp y$$

を満たす y のことです。ここで両辺を x で微分します。

$$x = \exp y$$

の左辺は

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

です。一方、右辺は $y = y(x)$ であることに注意して、合成関数の微分を使うと

$$\frac{d}{dx} \exp(y(x)) = \exp(y(x)) y'(x)$$

となります。したがって

$$1 = \exp(y(x)) y'(x)$$

です。ここで $y(x) = \log x$ なので、

$$\exp(y(x)) = \exp(\log x) = x$$

です。よって

$$1 = x y'(x)$$

となり、

$$y'(x) = \frac{1}{x}$$

を得ます。したがって

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}}$$

です。ただし $\log x$ は $x > 0$ で定義されるので、この公式も

$$x > 0$$

で成り立ちます。



同様に、関数 $y(x) = \sqrt{x}$ の導関数が $1/(2\sqrt{x})$ になることを、この $y(x)$ が $y(x) = x^2$ の逆関数であることから導出してください。

$y(x) = \sqrt{x}$ は、関数

$$y = x^2$$

の逆関数です。ただし x^2 は実数全体では一対一ではないので、ここでは

$$x \geq 0$$

に制限した関数

$$y = x^2 \quad (x \geq 0)$$

の逆関数として考えます。

いま

$$y = \sqrt{x}$$

とおくと、これは

$$x = y^2$$

を満たす y のことです。ここで両辺を x で微分します。

左辺は

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

です。一方、右辺は $y = y(x)$ であることに注意すると、合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx}y(x)^2 = 2y(x)y'(x)$$

となります。したがって

$$1 = 2y(x)y'(x)$$

です。よって

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)}$$

となります。ここで

$$y(x) = \sqrt{x}$$

なので、

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

を得ます。したがって

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

です。

ただし、この式は分母に \sqrt{x} があるので、

$$x > 0$$

で成り立ちます。実際、 \sqrt{x} は $x = 0$ では微分可能ではありません。



同様に、関数 $y(x) = \text{Arcsin}(x)$ の導関数が $1/\sqrt{1-x^2}$ になることを、この $y(x)$ が $y(x) = \sin(x)$ の逆関数であることから導出してください。

$y(x) = \arcsin x$ は、関数

$$y = \sin x$$

の逆関数です。ただし $\sin x$ は実数全体では一対一ではないので、ここでは

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

に制限した関数

$$y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

の逆関数として考えます。

いま

$$y = \arcsin x$$

とおくと、これは

$$x = \sin y$$

を満たす y のことです。ここで両辺を x で微分します。

左辺は

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

です。一方、右辺は $y = y(x)$ であることに注意すると、合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx} \sin(y(x)) = \cos(y(x)) y'(x)$$

となります。したがって

$$1 = \cos(y(x)) y'(x)$$

です。よって

$$y'(x) = \frac{1}{\cos(y(x))}$$

となります。

ここで

$$y = \arcsin x$$

なので

$$\sin y = x$$

です。したがって三角関数の基本公式

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

より

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

となります。

さらに、 $\arcsin x$ の値域は

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

なので、この範囲では

$$\cos y \geq 0$$

です。したがって

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

です。

ゆえに

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となります。つまり

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

です。

ただし、この式は分母が 0 にならない

$$-1 < x < 1$$

で成り立ちます。実際、 $\arcsin x$ は端点 $x = \pm 1$ では通常の意味では微分可能ではありません。