

有界単調数列の収束



私は大学1年生です。微分積分学の授業を受け始めたばかりです。そこで聞きたいのですが、「有界な単調数列は収束する」というのは定理ですか、それとも公理ですか。そして、これはなぜ、どのように重要なのでしょうか。

ふつうの微分積分学・実数論の立場では、「有界な単調数列は収束する」は定理です。

公理そのものではありません。

ただし、少し丁寧に言うと、

- 何を「公理」として採用するか
- そこから何を「定理」として証明するか

は流儀によります。ですから、ある教科書ではこれを“実数の基本性質”として最初から認めることもあります。

しかし標準的には、これは **実数の完備性** から導かれる定理だと考えます。

1. では、何から証明されるのか

代表的なのは **上限の存在** です。

実数について、

上に有界な空でない実数集合は上限をもつ

という性質を認めると、

「有界な単調増加数列は収束する」が証明できます。

たとえば、単調増加数列

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

が上に有界だとします。

このとき、項全体の集合

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

は上に有界なので、上限

$$\alpha = \sup A$$

をもちます。

この α が極限であることを示せばよいです。

上限の性質より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\alpha - \varepsilon$$

は上限ではないので、ある N があって

$$a_N > \alpha - \varepsilon$$

となります。

単調増加だから $n \geq N$ なら

$$a_n \geq a_N > \alpha - \varepsilon$$

です。他方、 α は上界なので

$$a_n \leq \alpha$$

です。したがって

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$$

となり、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

です。よって

$$a_n \rightarrow \alpha.$$

これで収束が示されました。

単調減少の場合も同様です。

2. なぜ公理ではないのか

この命題は、もっと根本にある

実数には“隙間がない”

という性質から出てくるからです。

この「隙間がない」という性質は、いろいろな同値な形で表せます。たとえば：

- 上限の存在
- 有界単調数列の収束
- コーシー列の収束
- 閉区間縮小法
- ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

などです。

これらは実はかなり深いところにつながっていて、**実数の完備性の別の顔**です。

なので、

- 上限の存在を公理にする流儀もある
- 有界単調数列の収束を基本原理として採る流儀もある

という意味では、採用の仕方しだいでは“公理っぽく”扱われることもあるのですが、通常の授業では **定理** と思ってよいです。

3. なぜ重要なのか

これは非常に重要です。理由は、**極限が本当に存在することを保証してくれる基本装置**だからです。

たとえば、計算していて

- 数列がどんどん増えている
- でもどこまでも大きくはならず、ある範囲に閉じ込められている

と分かったとします。

そのときこの定理を使えば、

では、その数列はどこかの値に近づいていくはずだ

と結論できます。

つまり、**極限の存在証明**に使えるのです。

4. どんな場面で使うのか

初学段階でも、かなり多くのところで顔を出します。

例1：数列で定義される数

たとえば、ある数を近似で作るときに、

- 近似値が単調に増える
- しかも上から押さえられている

と示せれば、極限が存在します。

例2： $\sqrt{2}$ の存在のイメージ

$\sqrt{2}$ に近づくような近似列を考えたときにも、「ちゃんと極限がある」という保証が必要です。

例3：微分積分全般

極限、連続、積分、級数などでは、
「近似を重ねたものが本当にある値に落ち着くか」が大事です。
その基礎にこの種の定理があります。

5. 有理数ではだめなのか

ここが本質です。
この定理は **実数では正しい** のですが、**有理数だけの世界では壊れます**。

たとえば、 $\sqrt{2}$ に近づく有理数列を考えると、

- 単調増加
- 上に有界

であっても、その極限が $\sqrt{2}$ なので、
有理数の中では収束先が存在しない ことがあります。

つまりこの定理は、

実数は、有理数よりも“完成された数の世界”である

ことを表しています。

6. まとめ

要点だけ言うと、

- **通常は定理**
- その背後には **実数の完備性** がある
- **極限の存在を保証する** ので、微分積分の基礎として非常に重要
- 有理数では一般に成り立たず、**実数の本質的な性質**を表している

ということです。

ひとことで言えば、

「増え続けるけれど上には飛び出さないものは、実数の中では必ずどこかに落ち着く」

という、実数の“隙間のなさ”を表す定理です。

必要でしたら次に、

「**完備性**」とは何かを大学1年生向けにやさしく説明する版
を続けて書きます。



数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ であることがわかっているとき、この数列が単調増加することを示してください。また、その収束先を計算してください。なお、後者の計算については計算方法も教えて下さい。

はい。これは微分積分の最初のほうでよく出る、典型的できれいな例です。

与えられた数列は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

です。

結論から言うと、

- この数列は **単調増加**
- しかも **上に有界**
- したがって **収束**
- 収束先は

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。

以下、順に示します。

1. 単調増加であることの証明

まず実際に少し計算すると、

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt{\sqrt{2} + 1}, \dots$$

なので、たしかに増えていそうです。

これをきちんと示します。

方法

関数

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

を考えると、これは x が大きくなれば $f(x)$ も大きくなる関数です。

つまり **単調増加関数** です。

いま

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

となっています。

まず

$$a_2 = \sqrt{a_1 + 1} = \sqrt{2} > 1 = a_1$$

です。

次に、もし

$$a_n > a_{n-1}$$

なら、 f は単調増加だから

$$a_{n+1} = f(a_n) > f(a_{n-1}) = a_n$$

となります。

したがって数学的帰納法により、

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

です。よって数列 $\{a_n\}$ は **単調増加** です。

2. 収束することを示すために、上に有界であることを示す

単調増加だけでは、どこまでも大きくなる可能性があります。

そこで上からおさえます。

収束先として出てきそうな数を先に予想すると便利です。

極限を L とすると、漸化式から

$$L = \sqrt{L + 1}$$

になりそうです。これを解くと

$$L^2 = L + 1 \iff L^2 - L - 1 = 0$$

なので、

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

です。数列の項はすべて正なので、候補は

$$\phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。この ϕ を上界に使います。

ϕ が上界であること

まず

$$a_1 = 1 < \phi$$

です。

さらに、もし $a_n < \phi$ なら

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{\phi + 1}$$

ですが、 ϕ は

$$\phi^2 = \phi + 1$$

を満たすので

$$\sqrt{\phi + 1} = \sqrt{\phi^2} = \phi$$

です。したがって

$$a_{n+1} < \phi$$

となります。

よって帰納法により、すべての n について

$$a_n < \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。

つまり $\{a_n\}$ は **上に有界** です。

3. よって収束する

$\{a_n\}$ は

- 単調増加
- 上に有界

なので、「有界な単調数列は収束する」という定理により、 $\{a_n\}$ は収束します。

4. 収束先の計算方法

ここが「計算方法」を知るうえで大事なところです。

手順

収束先を L とおきます：

$$a_n \rightarrow L \quad (n \rightarrow \infty)$$

漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$$

の両辺で $n \rightarrow \infty$ とすると、平方根は連続関数なので極限を中に入れて、

$$L = \sqrt{L + 1}$$

を得ます。

両辺を2乗して

$$L^2 = L + 1$$

すなわち

$$L^2 - L - 1 = 0$$

です。2次方程式を解くと

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ですが、数列の項は $a_1 = 1$ から始まり、すべて正です。したがって極限 L も正でなければなりません。よって負の解は除いて、

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。

5. まとめ

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について、

1. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ は単調増加なので、帰納法により

$$a_{n+1} > a_n$$

したがって $\{a_n\}$ は単調増加。

2. $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると、帰納法により

$$a_n < \phi$$

なので上に有界。

3. よって $\{a_n\}$ は収束する。

4. 極限を L とおくと

$$L = \sqrt{L + 1}$$

より

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

したがって収束先は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。

必要なら次に、この種の問題の「解き方の型」を3行くらいに整理してお見せします。



その単調増加性の議論は添字のズレをうまく使っていますが、初学者にはテクニカルすぎるかと思えます。真似すると間違えかねません。もう少し素直な方法はありませんか？

はい、あります。

初学者向けには、添字をずらして比較するより、「差 $a_{n+1} - a_n$ をそのまま調べる」ほうが素直です。

この問題では、次の流れが分かりやすいです。

方針

数列

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$$

について、

1. まず a_n がある定数より小さいことを示す
2. その範囲では $a_{n+1} - a_n > 0$ になることを示す

という順に進めます。

ここで使う定数は

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

です。これは

$$\phi^2 = \phi + 1$$

を満たします。

1. まず $a_n < \phi$ を示す

これを帰納法で示します。

初項

$$a_1 = 1 < \phi$$

です。

帰納法

いま

$$a_n < \phi$$

と仮定します。すると

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{\phi + 1}.$$

ところが $\phi^2 = \phi + 1$ なので

$$\sqrt{\phi + 1} = \sqrt{\phi^2} = \phi$$

です。したがって

$$a_{n+1} < \phi.$$

よってすべての n について

$$a_n < \phi$$

が成り立ちます。

2. 差 $a_{n+1} - a_n$ を直接調べる

ここが「素直な方法」です。

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - a_n$$

ですが、このままでは符号が見にくいので、有理化します：

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(\sqrt{a_n + 1} - a_n)(\sqrt{a_n + 1} + a_n)}{\sqrt{a_n + 1} + a_n}$$

$$= \frac{a_n + 1 - a_n^2}{\sqrt{a_n + 1} + a_n}.$$

分母

$$\sqrt{a_n + 1} + a_n$$

は正です。したがって、符号は分子

$$a_n + 1 - a_n^2$$

で決まります。

そこでこれを変形すると、

$$a_n + 1 - a_n^2 > 0 \iff a_n^2 - a_n - 1 < 0.$$

2次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0$$

の正の解は $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ですから、

$$0 < x < \phi$$

なら

$$x^2 - x - 1 < 0$$

です。

さきほどすでに $a_n < \phi$ を示し、しかも $a_n > 0$ は明らかなので、

$$a_n^2 - a_n - 1 < 0$$

したがって

$$a_n + 1 - a_n^2 > 0.$$

よって

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

です。

つまり

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となり、数列は **単調増加** です。

3. 収束先

すでに

- 単調増加
- 上から ϕ で抑えられる

ことが分かったので、数列は収束します。

極限を L とすると、

$$L = \sqrt{L + 1}$$

より

$$L^2 = L + 1$$

$$L^2 - L - 1 = 0.$$

したがって

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

しかし $a_n > 0$ なので極限も正です。よって

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

4. 初学者向けにはどう説明するとよいか

授業では、次のようにまとめると見通しがよいです。

- まず「どこに向かいそうか」を方程式

$$x = \sqrt{x + 1}$$

から予想する

- その値 ϕ より常に小さいことを示す
- そのあと

$$a_{n+1} - a_n$$

を直接計算して正であることを示す

この方法だと、「添字をずらして比較する」というテクニックを使わずに済みます。

必要なら次に、この解答を**大学1年生向けの答案としてそのまま書ける形**に、もう少し簡潔に整えてお出しします。