1. (a). $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1$ より. $2t = 2x\frac{dx}{dt}$ より $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{x}$.

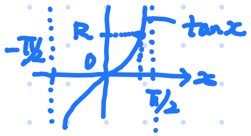
↑ ヒントをつける.

よって $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \frac{t}{x}\cdot\frac{t}{x}dt = \frac{t^2}{x^2}dt = \frac{t^2}{t^2-1}dt = \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}\right)dt$ より.

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C //.$$

(b) まじめに $t:=\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ とすると、$\sin x = 2t\cdot\frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$ より

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt = \int\frac{2}{t^2+2t+1}dt = \int\frac{2}{(t+1)^2}dt = \frac{-2}{t+1}+C = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C. //$$



2. 一応広義積分としてまじめにやると、

$$解 = \lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{R}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} //.$$

3. $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ → この不定積分は問1 (a)で求めてある.

よって. $l = \left[\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{}-1}{\sqrt{}+1}\right|\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \left(\sqrt{1+8}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3-1}{3+1}\right)\right)-\left(\sqrt{1+3}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right)$

$= 3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ //.

4. (a) $(2y+1)dy = 3x^2 dx \Leftrightarrow y^2+y = x^3+C$

「$x=0$ の時、$y=1$ だった」という条件をつける

正は、 $y^2+y+(C-x^3)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1-4(C-x^3)}\right)$

$x=0$ の時 $y>0$ より $\pm$ は $+$。 $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1-4(C-0)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4C}-1\right)=1$

$\Leftrightarrow 2+1=\sqrt{1-4C} \Leftrightarrow 9=1-4C \Leftrightarrow 8=-4C \Leftrightarrow C=-2$.

よって、$y=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1-4(-2-x^3)}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{9+4x^3}\right)$ //

(b) $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2$, $p(x)=-\frac{2}{x}$, $q(x)=x^2$ とすると、$\int p = P = -2\ln x + C_0$ に対し、

$C_1 = e^{C_0}$

$R(x) := \int q e^{P} = \int x^2 e^{-2\ln x + C_0} dx = \int C_1 \cdot x^2 \frac{1}{x^2} = C_1 x + C_2$ とし、

$y=(R+C_3)e^{-P} = (C_1x+C_2)e^{2\ln x}\cdot\frac{1}{C_1} = (x+C_4)x^2$

confirm $y' = 3x^2+2C_4x$, $-\frac{2}{x}y = -2(x^2+C_4x)$. より $y'-\frac{2}{x}y = x^2$ となり、正しい。

$x=1$ の時、$y=3$ とする。$\Rightarrow 3=(1+C_4)1$ より $C_4=2$.

よって $y = x^3+2x$ //.

5. $(D^2-2D-3)y=0$ で、$\Leftrightarrow (D-3)(D+1)y=0$ より、$(D-3)y=0$ と $(D+1)y=0$ の解の合計が解。

$(D-3)y=0 \Rightarrow y=C_1e^{3x}$, $(D+1)y=0 \Rightarrow y=C_2e^{-x}$

$\Rightarrow y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ //.

6. $(D^2-1)y=e^{2x}$. まず特解. $y_s(x)=\frac{1}{D^2-1}e^{2x}=\frac{1}{P(D)}e^{2x}=\frac{1}{P(2)}e^{2x}=\frac{1}{4-1}e^{2x}=\frac{1}{3}e^{2x}$.

confirm. $D^2\left(\frac{1}{3}e^{2x}\right)=\frac{4}{3}\cdot e^{2x}$ より、$(D^2-1)\left(\frac{1}{3}e^{2x}\right)=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)e^{2x}=e^{2x}$.

斉次解（$(D^2-1)y=0$ の解）は $C_1e^{x}+C_2e^{-x}$ であるので、

一般解は $C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$ //.