§7-2. 係数が定数の場合の線形DEの解法.

この DE に対し, $q=0$ の時の解を 斉次解 と言う.

target 問題を $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1y'+a_0y=q(x)$ 〜(*) とし、$a_0\sim a_{n-1}$ は単なる定数とする.

Th. 特解と斉次解.

$\overset{Ⓐ}{\text{DE(*)の特殊解}}$ ... DE(*)の一般解 = DE(*)の特殊解 (A) + DE(*)の斉次解の一般解 (B) である.

つまり、DE(*) に対して, $q(x)$ が あるとして とにかく具体解を1つでも得れば、一般解は $q=0$ として計算可能だ!

(注) DE(*)の斉次一般解は n個の基本解 $u_k(x)$, $k=1\sim n$ を用いて $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ と書ける.

$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)=0$ を $^\forall x$ で満たすコトは $^\forall c_k=0$ 以外では不可能な解のセット.

任意定数

まずは (B) から…

Th. (B) の具体形.

(注) 以降, 簡単の為 $\frac{d}{dx}=D$ として書いていく….

λ_i は複素数であっても良い.

(式(*)で $q=0$) $\Leftrightarrow$ $\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\right)y=0$ 〜(*2) の左辺の〜〜の部分を因数分解して $(D-\lambda_1)^{l_1}(D-\lambda_2)^{l_2}\cdots(D-\lambda_m)^{l_m}$ としよう.

この時、

1. (*2) の一般解は、$(D-\lambda_i)^{l_i}y=0$ の一般解の和 である.
2. $(D-\lambda_i)^{l_i}y=0$ の一般解は $\left(\sum_{k=0}^{l_i-1} c_{i,k}x^k\right)e^{\lambda_i x}$ である ($c_{i,0}\sim c_{i,l_i-1}$ は任意定数)

例. $(D-1)^2(D-2)y=0$ の一般解は $y(x)=(c_0+c_1x)e^x+c_2e^{2x}$ である.

次にⒶについて。　　注 このページのギロン・手法は「演算子法」と呼ばれるコトも。

Th. Ⓐの為の公式. 前ページの式(*)を因数分解して $(D-\lambda_1)^{l_1}\cdots(D-\lambda_m)^{l_m}y = q$ とするところまでは同様として、

$(D-\lambda)y = q$ の解は、(#7-1-2 その③を用いて) $y(x) = (R(x)+c)e^{\lambda x}$, ただし、$R$ は $qe^{-\lambda x}$ の原始函数.

Ⓐとしては解は1つ求まれば十分なので、このCは適当に決めちゃえ.

よって、

$(D^2-3D+2)y = e^x$ の特解は、記号的に $\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x$ と書いて、

$(D-1)(D-2)$

$$\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x = \frac{1}{D-1}\cdot(R+c)e^{2x}$$, (ただし $R = \int e^x\cdot e^{-2x}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$) で、$c=0$ と勝手に決めて、

$$= \frac{-1}{D-1}e^x = (-1)(\tilde{R}+\tilde{c})e^x$$, (ただし、$\tilde{R} = \int e^x\cdot e^{-x}dx = x$) で $\tilde{c}=0$ 〃 ,

$$= -xe^x.$$ (← あくまで $(D^2-3D+2)y = e^x$ の解の1つ).

Dの多項式 $p(D)$ に対し、 $p(D)f = g \overset{d}{\Leftrightarrow} f = \frac{1}{p(D)}g$ と記号的に書くコトにしておいて、いくつかの便利な公式がある.

1. シフト. $\frac{1}{p(D)}q(x) = e^{\lambda x}\frac{1}{p(D+\lambda)}\left(e^{-\lambda x}\cdot q(x)\right)$.

2. 指数函数が対象の時. $p(\lambda)\neq 0$ の時、 $\frac{1}{p(D)}e^{\lambda x} = \frac{1}{p(\lambda)}e^{\lambda x}$. ← $p(\lambda)=0$ の時は、上のⒶの為の公式を使おう.

3. 多項式が〃　$q(x)$ が x の n 次多項式ならば. $\frac{1}{1-aD}\cdot q(x) = \{1+aD+(aD)^2+\cdots+(aD)^n\}q(x)$

例. $(D+2)y = x^2$ の特解は、 $\frac{1}{D+2}x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}D}x^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^2\right)x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.