§7-1. 1階の微分方程式 (differential equations (DE)) → 科学技術のあらゆる場面で登場するぞ!!

まず、

微分方程式とは? → 関数 $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、その(偏)微分 $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ や 高階の(偏)微分 $\frac{\partial^k y}{\partial x_i^k}$ を含む方程式のコト。

この階数を微分方程式の階数と呼ぶコトも。

「方程式」なので、それを解くと解が得られる。この場合は関数 $y(x)$ が解となる。

例. $y = y(x)$ に対して、$\frac{dy}{dx} = 3y$ は微分方程式である。

「yの微分とyが比例する」という関係を示している。

ちなみにこのDEの解は $y(x) = Ce^{3x}$ (ただし C は定数) である。(式に代入して確かめよう)

線形性, 斉次性: 方程式中に微分項が1次項としてのみ現われる時、つまり、DEが
$$\sum_{i,k} p_{i,k}(x) \frac{\partial^k y}{\partial x_i^k} = q(x)$$
の形の時、これを線形なDEと言う。

この $p_{i,k}$ が x に依存しない定数だと計算が楽だよ。→ §7.2へ。

$q = 0$ なものを斉次形, $q \neq 0$ のものを非斉次形と言う。

• DEを解く為の特殊?な知識

その1 DEの

変数分離形: DEで、$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ の形のものを言う。

原理的には、解 $y(x)$ が求まる。というのも、$\frac{1}{g(y)}$ の原始関数を $G(y)$, $f(x)$の 〃 を $F(x)$ とおくと、

つまり、$\frac{dG}{dy} = \frac{1}{g(y)}$　　$\frac{dF}{dx} = f(x)$ というコト。

$G(y) = F(x) + C$ ←積分定数　〜(*)

が成り立ち、これにはもう微分は含まれていないのでこれを解けば $y = y(x)$ が求まる。

両辺を $\frac{d}{dx}$ すると

$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)} \cdot f(x)g(y) = f(x)$, $\frac{d(F+C)}{dx} = f(x)$ となり、確かに成り立つコトが分かる。

(おまけ) 行儀の悪い(*)の納得の仕方: 元の式を、$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx + C$ と変形して両辺を積分すると (ここが怪しい…) $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C'$ となる。($\int \frac{1}{g(y)}dy$ 〃 $G(y)$, $\int f(x)dx$ 〃 $F(x)$)

例. $\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy = x\,dx + C \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C'$ (C'は定数)

$\Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = C_2 e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = ce^{\frac{1}{2}x^2}$, cは任意定数

注 このように任意定数を残した一般形の解を一般解と言い、その定数に具体的に数字を代入した解を特殊解と言う。

注 $\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C$ (← 微分すると確かめられる)

その② DEの同次形： $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形のものを言う。$z(x):=\frac{y}{x}$ として y を消去し、$\frac{dz}{dx}=\cdots$ の式に変形すると変数分離形になる。

実際、$y=xz$ なので、$y'=z+xz'$ より、$z+xz'=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(z) \Leftrightarrow z'=\frac{1}{x}\cdot\{f(z)-z\}$ となる。 $\frac{1}{f(z)-z}dz=\frac{1}{x}dx+c$ となる。

例. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$ （$x\neq0$ として） に対して、$z:=\frac{y}{x}$ とおくと（$\Leftrightarrow y=xz$） $y'=\begin{cases} z+xz', \\ \frac{y}{x}-1=z-1 \end{cases}$ より $z'=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow z(x)=-\ln|x|+c \Leftrightarrow y(x)=x(-\ln|x|+c)$

その③ 1階線形DEの解の公式： $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ というDEは、$P(x)$ を $p(x)$ の原始関数（$\frac{dP}{dx}=p$）, $R(x)$ を qe^{P} の原始関数（$\frac{dR}{dx}=qe^{P}$）とすると 解として $y(x)=(R(x)+c)\cdot e^{-P(x)}$ を持つ。

例. $\frac{dy}{dx}+xy=x$ に対し、$P=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$ なので、$R=\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx=\int\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2}\right)dx=e^{\frac{1}{2}x^2}$.

よって、$y(x)=\left(e^{\frac{1}{2}x^2}+c\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}=1+ce^{-\frac{1}{2}x^2}$.

その③'：ベルヌーイのDE

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m$, m:整数 に対し、$m\neq0,1$ の時 $z:=y^{1-m}$ とすると z に対する1階の線形DEになり、上のその③が使える。

その④ 完全微分形. DEを $P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ と書いて、$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (*) と表わす。この時、

$P=\frac{\partial}{\partial x}F$, $Q=\frac{\partial}{\partial y}F$ となる $F(x,y)$ が存在する時、(*)を完全微分形と言い、このDEの解は $F(x,y)=\overset{\text{任意定数}}{c}$ である。

理屈は easy. $P=F_x$, $Q=F_y$ なんだから、$\overbrace{F_x\,dx+F_y\,dy}^{=dF}=0 \Leftrightarrow F=const.$

なお、完全微分形の時は、$F(x,y):=\int_a^x P(s,b)\,ds+\int_b^y Q(x,t)\,dt$ と決めれば良い。（a,b は勝手に決めて良い）。

注 Th. 式(*)が完全微分形である $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}P=\frac{\partial}{\partial x}Q$. ← (*)が「使える式」かどうかを check できる。

その④′　「苦しまぎれ」である…

積分因子：$\overset{\text{前ページの式}}{(*)}$ が完全微分形でなくとも、式に $M(x,y)$ を掛けるとそうなることがある。その時、この M を積分因子と言う。

まあ、そんなものが都合良く見つかることはない。教科書 p.162 には見つかるケースが書いてあるが、まあ無視して良いだろう…