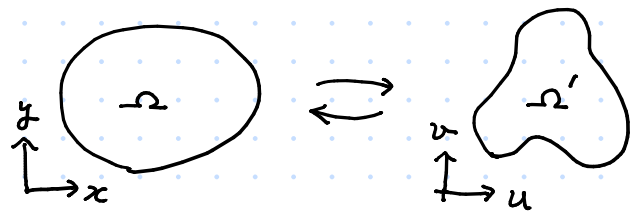


§5-2. 重積分の変数変換.

#5-2-1.



(x, y) 変数と (u, v) 変数が $(x, y) \in \Omega, (u, v) \in \Omega'$ において

(面積=0 なる点 etc. を除いて) 1対1 対応する函数 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ に書けて、

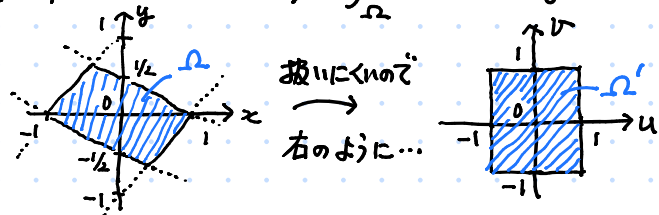
単なる実数.

ヤコビアン $J := \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0$ とする. (この J は $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ と書くことも多い.)

この時、 $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| du dv$ が成立. $\rightarrow$ まあ、 $dx dy = |J| du dv$ というコトなのだ.

$$\left(\underbrace{dy \cdot dx}_{\text{微小面積}} = |J| \times \underbrace{dv \cdot du}_{\text{微小面積}} \right) \leftarrow$$

例 (教 p. 117 例題 5.2.1) $\int_{\Omega} (x-y)^2 dx dy$ を求めよ. ただし、 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$



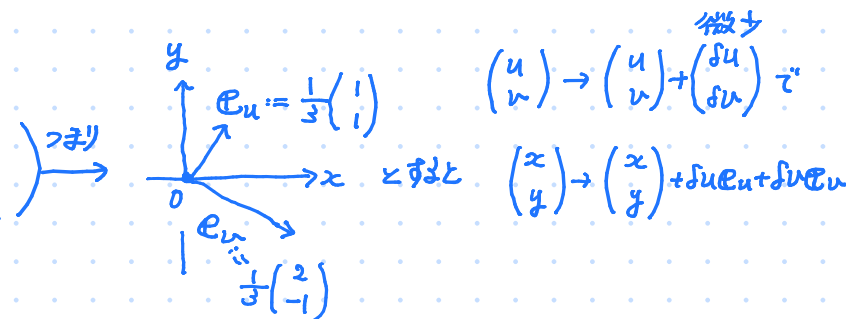
$$\begin{cases} u := x+y \\ v := x-y \end{cases} \text{ とおく. } \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases} \quad \& \quad |J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = 1/2.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\Omega} f dx dy &= \int_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{1}{2} \cdot du dv = \int_{\Omega'} u^2 \cdot \frac{1}{2} du dv = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{6} u^3 \right]_{-1}^1 du \\ &= \frac{2}{6} \int_{-1}^1 1 \cdot du = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

考え方は...

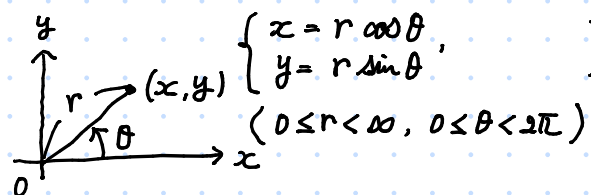
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u + \delta u \\ v \end{pmatrix} \text{ と少し変化させると } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ は } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \delta u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u \text{ に、}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v + \delta v \end{pmatrix} \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \delta v = \text{ " } + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta v \text{ に変化する.}$$

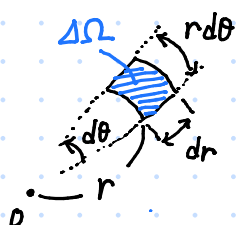


さて、 この面積 $\Delta \Omega$ は $\Delta \Omega = \left| \det(\delta u e_u, \delta v e_v) \right| = \delta u \delta v \cdot \frac{1}{2}$. $\therefore \int_{\Omega} f dx dy = \lim_{\#i \rightarrow \infty} \sum f|_{\Delta \Omega_i} = \lim_{\#i \rightarrow \infty} \sum f|_{\Delta \Omega_i} \cdot \frac{1}{2} du dv = \int_{\Omega'} f \cdot \frac{1}{2} du dv$.

例. 極座標



拡大



$$\text{微小面積 } \Delta \Omega = dr \cdot r d\theta = r dr d\theta$$

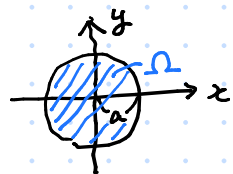
$$\leftarrow \left| \det \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \right| = r < \infty$$

計算する方法が
本来だが...

$(r, \theta) \in (r+dr, \theta+d\theta)$ とした時、
その間の $\Delta \Omega$ の図. r の変化方向と θ の変化方向が
直交しているので $\Delta \Omega$ が直感で求められる。

✓ 用いて例えは、



$$\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\Omega'} 1 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r \, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2 //$$