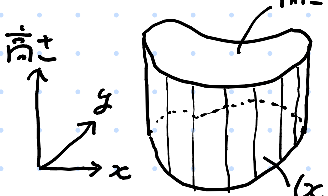
§5-1 重積分 ~ 多次元積分

§3では $\int \cdot\, dx$ という積分を扱った。このdxが多次元になるケースを扱おう。

例えば、$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の時に、$\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$ とは何か？

ただし、fはΩで連続としておく。

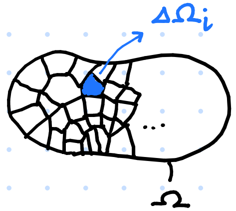


↓つまり、

この図形の「体積」が $\int_\Omega f\,dxdy$ である。

xy平面より上を正、下を負の値として

Ωを細かく分割して、$\{\Delta\Omega_i\}_i$ に分ける。



式で書けば

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_i \Delta\Omega_i, \\ \text{ただし } |\Delta\Omega_i \cap \Delta\Omega_j| = 0 \quad \text{when } i \neq j. \end{cases}$$

面積

という感じか。

そして、$\longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\sup|\Delta\Omega_i| \to 0} \sum_i f(x_i,y_i)\,|\Delta\Omega_i|$

$(x_i, y_i) \in \Delta\Omega_i$ として。

$\Delta\Omega_i$の面積。

が存在する時、この値を指す。

注 ↑の議論から当然ではあるが、$\int_\Omega 1\,dxdy$ は Ωの面積になる。

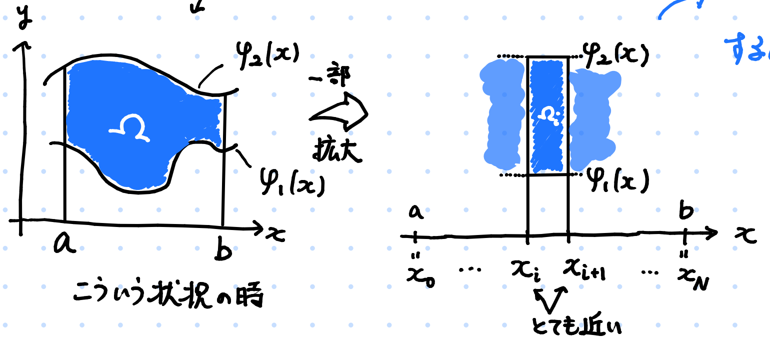
これを使うと楽な時がある。

累次積分 ~ $\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$ を、$\displaystyle\int_a^b \left(\underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy}_{} \right) dx$ のように、「より低い次元の積分に分解」した形の積分を言う。

$g(x)$のように、xだけの函数になる。つまり、ここを先に計算してしまえる。

→3次元以上でも話は同じ。

考え方は simple。例を示そう。



こういう状況の時

$[a,b]$ を $[x_0,x_1][x_1,x_2]\cdots[x_{N-1},x_N]$ と分割する。

$S_i := \int_{\Omega_i} f(x,y)\,dxdy$ として。

すると、$\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\Omega_i} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=0}^{N-1} S_i$ となる。

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ の狭い範囲にある時は、$f(x,y)$ の xは ほぼ一定とみて、

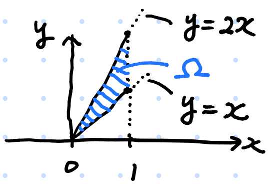
近いようにとる。

$$S_i = \int_{\Omega_i} f(x,y)\,dxdy \simeq \underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\Delta x_i\text{として}} \cdot \underbrace{\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy}_{=:\,g(x_i)\text{として}} \quad \text{となる。}$$

↙すると、

$$\int_\Omega f(x,y)\,dxdy \simeq \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i)\Delta x_i \xrightarrow{|\Delta x| \to 0} \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad //.$$

例.

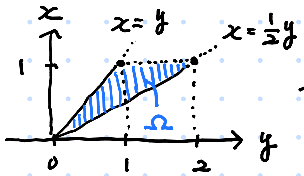


として

$$\iint_\Omega (x^2+y^2+1)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_x^{2x}(x^2+y^2+1)dy\right)dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3+y\right]_x^{2x}dx$$

$$= \int_0^1\left\{\underbrace{\left(2x^3+\frac{8}{3}x^3+2x\right)}_{\frac{14}{3}x^3} - \underbrace{\left(x^3+\frac{1}{3}x^3+x\right)}_{\frac{4}{3}x^3}\right\}dx = \int_0^1\left(\frac{10}{3}x^3+x\right)dx = \left[\frac{5}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{3} \, //$$

↓ y の立場で見ると



よって

$$// = \int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}y}^{y}(x^2+y^2+1)dx\right)dy + \int_1^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^{1}(x^2+y^2+1)dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x+x\right]_{\frac{1}{2}y}^{y}dy + \int_1^2\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x+x\right]_{\frac{1}{2}y}^{1}dy$$

$$= \int_0^1\left\{\left(\frac{1}{3}y^3+y^3+y\right)-\left(\frac{1}{24}y^3+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{2}y\right)\right\}dy + \int_1^2\left\{\left(\frac{1}{3}+y^2+1\right)-\left(\frac{1}{24}y^3+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{2}y\right)\right\}dy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{19}{24}y^3+\frac{1}{2}y\right)dy + \int_1^2\left(-\frac{13}{24}y^3+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{4}{3}\right)dy = \left[\frac{19}{24\cdot 4}y^4+\frac{1}{4}y^2\right]_0^1 + \left[-\frac{13}{24\cdot 4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^2+\frac{4}{3}y\right]_1^2$$

$$= \frac{19}{24\cdot 4}+\frac{1}{4}+\left(-\frac{13}{24\cdot 4}\cdot 16+\frac{1}{3}\cdot 8-\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{13}{24\cdot 4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \, //$$

同じ積分でも、「見方」によって計算の面倒さは異なるよ。
(→ 教 p.113 あたりのお話)　見方を変えるには、Ω の図を描くと良い。

積分の定義に依る。

Th. 微分と積分の順序の交換 (Leibniz則, Fubiniの定理 etc. …)

$f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ が $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ で連続で、下の式中の (x,y) が Ω 内のみを動く時、

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad \sim ① \; //$$

↓ 拡張として

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = b'(y)\cdot f(b(y),y) - a'(y)\cdot f(a(y),y) + \int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx \; // \quad \sim ②$$

$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = f(\alpha,y)$ であるコトに注意。

いずれも、たとえば $\exists c<a<b$ に対して $F(\alpha,y) := \int_c^\alpha f(x,y)\,dx$ とおいて

① $\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(F(b,y)-F(a,y)\right)$,　② $\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(F(b(y),y)-F(a(y),y)\right)$

を各々計算すると理解できる。