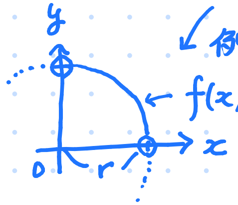
§4-4. 陰函数定理と未定係数法.

陰函数とは： $f(a,b)=0$ が成り立つ場合、$S_\varepsilon := \{(x,y) \mid f(x,y)=0,\ |x-a|<\varepsilon\}$ とすると $^\exists\varepsilon>0$ に対して

$S_\varepsilon = \{(x, g(x)) \mid |x-a|<\varepsilon\}$ と表わせる時、$y=g(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義した陰函数と言う.

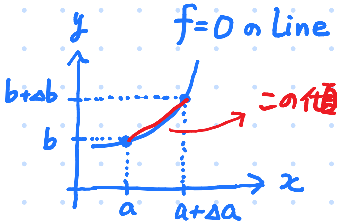


例. $f(x,y)=x^2+y^2-r^2=0$ の line. $\left|x-\frac{r}{2}\right|<\frac{r}{2}$ の時、$f=0$ の line は $y=\sqrt{r^2-x^2}=g(x)$ と書け、これが $f=0$ の陰函数の1つ.

Th. 陰函数： $f(x,y)$ が C^1 級で $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ ならば、次の ①, ② が成り立つ.

① $^\exists$区間 I s.t. $a\in$ I 上で $f=0$ の陰函数 $g(x)$ が存在し、もちろん $b=g(a)$ を満たす.

② $\dfrac{dg}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$ 〃.



という状況を考えると、Taylor より、

$$\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{f(a+\Delta a)} = \underset{\substack{\shortparallel\\0}}{f(a)} + \nabla_x f\cdot\Delta a + O(\|\Delta a\|^2)$$

$$= (\partial_x f\ \ \partial_y f)\begin{pmatrix}\Delta a\\ \Delta b\end{pmatrix} + 〃 = \Delta a f_x + \Delta b f_y + O(\cdots)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta b}{\Delta a} = -\frac{f_x}{f_y} \quad (\leftarrow \Delta a\to 0 \text{ の limit で})$$

$$\frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{dg}{dx}.$$

- 陰函数の微分 ～ あまりやりたくないが必要な時も. 2つほど方法を示そう.

① 前ページより $\frac{dg}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ であるので、これを微分していく方法.

例えば. $\frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(f_x(x,g(x)))\cdot f_y(x,g(x)) - f_x(x,g(x))\cdot\frac{d}{dx}(f_y(x,g(x)))}{f_y(x,g(x))^2}$ であるので、 ～(*)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}f_x(x,g(x)) = f_{xx}(x,g(x)) + f_{xy}(x,g(x))\frac{dg}{dx} = f_{xx} - \frac{f_x f_{xy}}{f_y} = (f_y f_{xx} - f_x f_{xy})/f_y, \\ \frac{d}{dx}f_y(x,g(x)) = f_{xy}(\,〃\,) + f_{yy}(\,〃\,)\frac{dg}{dx} = f_{xy} - \frac{f_x f_{yy}}{f_y} = (f_y f_{xy} - f_x f_{yy})/f_y \end{cases}$$

を代入して、

$$(*) = \frac{-1}{f_y^2}\cdot\left\{(f_y f_{xx} - f_x f_{xy})\cdot\frac{1}{f_y}\cdot f_y - f_x\cdot(f_y f_{xy} - f_x f_{yy})\cdot\frac{1}{f_y}\right\} = \frac{-1}{f_y^3}\left(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2\right)$$

$f=0$ の情報を上手く使える場合.

② $f(x,g(x)) = 0$ を微分していく方法. ラッキーだと早いが、アンラッキーだと逆に手間.

例.（教 p.103 の例題 4.4.3）: $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2 = 0$ に対して, $y = g(x)$ の2階微分は?

まず1回微分して, $3x^2 + g^2 + 2xg\cdot g' \underset{(*2)}{=} 0 \Rightarrow g' = -(3x^2+g^2)/2xg$. ～(*3)

そしてもう1回. $6x + 2g\cdot g' + 2g\cdot g' + 2x(g')^2 + 2xg\cdot g'' = 0 \Rightarrow g'' = \left(3x + 2g\cdot g' + x(g')^2\right)/xg$ となるので、

あとは (*3) を代入すれば良い.

あと、$f = x^3 + xg^2 - 2 = 0$ より $g^2 = \frac{2}{x} - x^2$ を用いると少しだけ楽. かな…

Th. Lagrange(ラグランジュ)の未定係数：点 $a \in \mathbb{R}^n$ が q 個の制約条件 $r_i(x)=0$, $i=1,2,\cdots,q$ のもとで函数 $f(x)$ の極値を与える

$\Rightarrow$ $^\exists$定数 $\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_q}$ が存在して $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x_i} f \Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{q} \lambda_j r_j\Big)\Big|_{x=a}$ が成り立つ。 //

これをラグランジュの未定係数と言う。

これを使うと、制約下での極値の計算ができる!!

要するに、$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q) := f(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j r_j(x)$ とおくと、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L} = 0, & i = 1 \sim n, \\ r_j = 0, & j = 1 \sim q \end{cases}$$

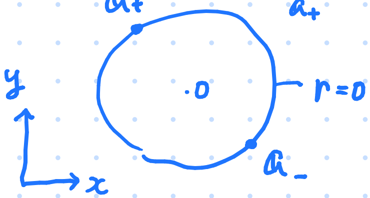
の解が極値点の候補だ、と言っている。

例. (教 p.106 問6 (1)). $\begin{cases} \text{制約条件 } r(x) = x^2+y^2-2=0. \\ \text{みる函数 } f(x) = y - x. \end{cases}$ として、$^\exists$定数 λ が存在して、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} f(a) + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot r)(a) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y} f(a) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda r)(a) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L} = r = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} -1+\lambda \cdot 2a = 0, \\ 1 + \lambda \cdot 2b = 0 \end{cases}$ ← $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ として. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2\lambda \\ b = -1/2\lambda \end{cases} \longrightarrow$ これを制約 $r=0$ に代入すると、$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1/4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$.

よって、a の候補は $a = \underset{a_+}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{a_-}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ の2点. 各々での f の値は 2, −2.



そして、a_+ の近くで制約を満たしつつ x を動かすことを考える. つまり、$x = a_+ + \overset{\overset{\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}}{\shortparallel}}{\Delta x}$ とすると、

$r(a_+ + \Delta x) = 0 = (-1+\Delta x)^2 + (1+\Delta y)^2 - 2 = 2(-\Delta x + \Delta y) + \Delta x^2 + \Delta y^2$ が分かる. ~(*)

よって、$f(a_+ + \Delta x) = (1+\Delta y) - (-1+\Delta x) = 2 + (-\Delta x + \Delta y) \underset{(*)\text{より}}{=} 2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2)/2 < 2$ となるので $f(a_+)$ は極大.

同様にして $f(a_-)$ は極小.

実は、$H_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$ が正定値か負定値かで判定しても良い. (おすすめの方法)

この場合、$H_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ なので、$D_1 = 2\lambda$, $D_2 = \det H_{\mathcal{L}} = 4\lambda^2 > 0$ なので、$\begin{cases} \lambda > 0 \Leftrightarrow H_{\mathcal{L}} \text{は正定値} \Leftrightarrow \text{その } a \text{ は極小点}, \\ \lambda < 0 \Leftrightarrow \quad 〃 \text{負} 〃 \quad \Leftrightarrow \quad 〃 \quad \text{極大} 〃 \end{cases}$ となる.

a_+ の時、$\lambda = -1/2$ の為、a_+ は極大点であることが分かる.

a_- 〃 $\lambda = 1/2$ 〃 a_- は極小 〃 .

もう1つ、少し面倒な方法で計算する例.

例 (教p.105, 例題 4.4.4):

$$\begin{cases} \text{条件 (1つのみ)} & r(x) = x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0. \\ \text{関数} & f(x) = x^3 + y \end{cases}$$ で f の極値を調べる.

Th. Lagrange より、定数 λ が存在して、極値をとる点の候補を $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると $\mathcal{L} := f + \lambda r$ に対して

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(a)}_{3a^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\lambda r)(a)}_{\lambda\cdot 2a} = 0,\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(a)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\lambda r)(a)}_{\lambda\cdot(-\frac{1}{2}b)} = 0,\quad r(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 2\lambda a = 0 \longrightarrow a = -2\lambda/3 \\ 1 - \frac{1}{2}\lambda b = 0 \longrightarrow b = 2/\lambda \\ a^2 - \frac{1}{4}b^2 - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \lambda = -\sqrt{3}, \\ a = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \lambda = \sqrt{3}, \end{cases}$$

$a=0$はNG

そして、$a = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の付近での $r=0$ の陰関数を $g(x)$ として $f = f(x, g(x))$ とすると $f' = 3x^2 + g'$, $f'' = 6x + g''$ である.

xでの微分.

g' と g'' については、制約より $r(x, g(x)) = 0$ なので これを微分して $0 = 2x - \frac{1}{2}g\cdot g'$, $0 = 2 - \frac{1}{2}(g')^2 - \frac{1}{2}g\cdot g''$

より $g(a) = b = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ も用いて $g'(a) = \frac{4a}{g(a)} = \frac{4\cdot 2/\sqrt{3}}{-2/\sqrt{3}} = -4$, $g''(a) = \frac{4-(g')^2}{g} = \frac{4-16}{-2/\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ と分かるので、

a において $f'(a) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-4) = 0$, $f''(a) = 6\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 6\sqrt{3} = 10\sqrt{3} > 0$ となり、制約下で f は a で極小となる.

同様に、$a = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の時は f は極大となる. ($f'' < 0$ となるので).

→ 大変すぎる…

おすすめ!!

注 ちなみに、前ページと同じやり方で計算すると、
$f(a_+ + \Delta a) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{5}{3}\sqrt{3}\Delta a^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\Delta b^2 + \Delta a^3$ となり、
$\Delta a \to 0$ で $f(a_+ + \Delta a) > f(a_+) \left(= \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$
がすぐに分かり、a_+ が極小点だと分かる.

注2 もしくは、$H_x = \begin{pmatrix} 6x+2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}$ より $D_1 = 6x + 2\lambda$, $D_2 = \overset{-\frac{1}{2}\lambda D_1}{\overset{\shortparallel}{-\lambda(3x+\lambda)}}$ に対し、

a_+ に対して $D_1 = 6\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\cdot(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, $D_2 = -\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3} = 3$ より
H_x は正定値なので、a_+ は極小点.
a_- 〃 $D_1 = 6\cdot\frac{-2}{\sqrt{3}} + 2(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$, $D_2 = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(-2\sqrt{3}) = 3$ より
H_x は負定値なので、a_- は極大点.