§4-3. 高階偏微分, Taylor展開

まあ、たいていは偏微分の順序は関係ないと思って問題ない。

・$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)\right)$ と $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right)$ は異なる場合もあるが、x で $\frac{\partial}{\partial x_i}f$ も $\frac{\partial}{\partial x_j}f$ も(全)微分可能ならば同じになる。

偏微分の順序が異なる。

"$\partial_{x_i}\partial_{x_j}f$ と $\partial_{x_j}\partial_{x_i}f$ が連続" の時、同じになるという判断も正しい。

・C^n級: 関数 $f(x)$ が n 回偏微分でき、それらが全て連続なとき、その $f(x)$ を C^n級と言う。

テイラーの定理

Th. Taylor: 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ において、$^\exists x \in \Omega$ かつ $x+t\Delta x \in \Omega$ for $0 \le {}^\forall t \le 1$ とする。この時、C^k級な関数 f に対し、

$$f(x+\Delta x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} T_\nu(x) + R_k,$$

→ 剰余項とも言うよ。

$\sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots=\nu}$ は、$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n=\nu$ を満たすケース全ての和を意味するよ。

ただし、$T_\nu(x) := \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots=\nu}\left(\frac{1}{\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_n!}\partial_1^{\nu_1}\partial_2^{\nu_2}\cdots\partial_n^{\nu_n}f(x)\cdot\Delta x_1^{\nu_1}\Delta x_2^{\nu_2}\cdots\Delta x_n^{\nu_n}\right)$, $R_k := T_k(x+\xi\Delta x)$ for $0 \le {}^\exists\xi \le 1$.

∂_i は $\frac{\partial}{\partial x_i}$ のコト。 Δx_i は $\Delta x = \begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}$ の i 番目要素。

$x \in \mathbb{R}^2$ の時の例を見てみよう。

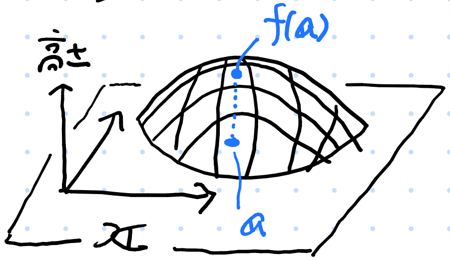
$T_\nu(x) = \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu}\frac{1}{\nu_1!\nu_2!}\partial_1^{\nu_1}\partial_2^{\nu_2}f(x)\Delta x_1^{\nu_1}\Delta x_2^{\nu_2}$ になるので、

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + \cdots + T_{k-1}(x) + R_k(x) \\
&= f(x) + \left(f_x\Delta x + f_y\Delta y\right) + \left(\frac{1}{2}f_{xx}\Delta x^2 + f_{xy}\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}f_{yy}\Delta y^2\right) + \cdots \\
&= f(x) + \nabla f\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_f \Delta x + \cdots
\end{aligned}$$

実質的にはこの2階までの式(しき)を覚えてしまえば十分!!

ただし、$H_f := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$ ← Hesse(ヘッセ)行列と言うよ。

Taylor展開と極値の関係：高さが $f(x)$ の曲面を考えて



← f が平らなら f の勾配 = 0 と言っているだけ…

・f が a で極値をとる ⇒ $\nabla f(a) = 0$ 〃

← ヘッセ行列

「H_f が対称であるコト」を用いている。

ヘッセ行列

・f が a で極小 ⟺ $\nabla f(a) = 0$，かつ，H_f の固有値が全て正． 〜(*)

（ 〃 極大 〃 ，かつ， 〃 負 ）

(*) はどういうコトか？前ページの最後の式より、Δa が十分に小さければ

$$f(a+\Delta a) = f(a) + \nabla f(a)\cdot\Delta a + \frac{1}{2}\Delta a^T H_f \Delta a + O(\|\Delta a\|^3)$$ で．$\nabla f(a) = 0$ より

$$\simeq f(a) + \frac{1}{2}\Delta a^T H_f \Delta a \,. \quad \sim (*2)$$

よって，

極小の def.

(*2) より

a で f が極小 ⟺ $f(a+\Delta a) - f(a) > 0$ for $^\forall \Delta a \neq 0$ ⟺ $\frac{1}{2}\Delta a^T H_f \Delta a > 0$ for $^\forall \Delta a \neq 0$

"正定値" の def. → ⟺ 行列 H_f が正定値

線形代数より → ⟺ 〃 H_f の固有値が全て正．

↖ H_f が対称なコトを用いている．

ちなみに．次の Th. が直接使える．

シルベスターの判定定理．

Th. Sylvester criterion： ← A が「実対称」の時にしか成り立たないので注意！！

→ 左上角からとった k×k 部分行列の行列式

（2×2 の H_f に対して）

- n×n 実対称行列 A が正定値 ⟺ 全ての小行列式 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ が正． → 教 p.96 Th 4.3.4 はこれを書いている．
- 〃 負 〃 ⟺ $D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \cdots$ となる．（D_1 は負．その後，D_k と D_{k+1} の符号が逆）

これを H_f に対して用いれば f の極値性を示せる．