

§4.2 多変数関数の微分連鎖律

単に「微分可能」と言うことも。

ベクトル空間の内積

全微分: 多変数関数 $f(x)$ に対し、 $f(x) - f(a) = C \cdot (x-a) + o(\|x-a\|)$ を満たす C が存在する時、

f は a で 全微分可能 と言う。この時、 f はどんな x_k でも偏微分可能で、実は $C = \nabla f(a)$ である。

つまり、 $f(x) - f(a) = \nabla f(a) \cdot (x-a) + o(\dots)$ と書けること = 全微分可能、だ。

・ 基本的に、 ∇f が存在して連続 $\Rightarrow$ 全微分可能 である。

・ 言い換え、 $f(x) - f(a) \simeq \nabla f(a) \cdot (x-a)$ が成り立つ、ということである。

(応用) 単変数連鎖律: ベクトル関数 $x = x(t)$ の時、 $f(x(t+dt)) - f(x(t)) \simeq \nabla f(x(t)) \cdot (x(t+dt) - x(t))$ と書けるので、
 $\sim (0)$

両辺を dt で割って limit をとると、

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(x(t+dt)) - f(x(t))}{dt} = \nabla f(x(t)) \cdot \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

$$= \frac{df(x(t))}{dt} = \nabla f(x(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (1)$$

$t \xrightarrow{x} x(t) \xrightarrow{f} f(x(t))$, つまり、
 $f \circ x$ という合成関数を微分している。

一般の連鎖律: $u \in \mathbb{R}^n$ ベクトル関数 $x = x(u)$ の時、
 この応用として...

$$(1) \text{ を使って } \frac{\partial f(x(u))}{\partial u_k} = \nabla f(x(u)) \cdot \frac{\partial x(u)}{\partial u_k} \text{ と書ける。}$$

(2) とても重要!!

教科書だと p.87 の定理 4.2.5 の中の式のこと。

そうえ、式はシンプルだが計算ミスがとっても多い...

例. $x = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 y^2 + x^3 y$ の時、

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{pmatrix} y^2 + 2x^2 y \\ 2xy + x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y^2 + 2x^2 y - 2xy - x^3 = (u-v)^2 + 2(u+v)^2(u-v) - 2(u+v)(u-v) - (u+v)^3 = \dots$$

面倒な計算。

//

Jacobi
ヤコビ行列: 前ページの (2) は $\frac{\partial f}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$ とバラせるので、これを $u_1, u_2, \dots, u_n$ について書いたものを並べると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{u の関数 } x \text{ の変置} \\ \text{x の関数 } \sim (1)}}$$

($\Leftrightarrow \nabla_u f^T = \nabla_x f^T J_{x(u)}$ と書ける)

$\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ が (i, j) 成分の行列、これを x の u に関するヤコビ行列と言い、 $J_{x(u)}$ などと書く。

さらに、ヤコビ行列が正方行列の場合、 $\det J_{x(u)} \in \text{ヤコビアン}$ と言い、 $\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}$ と書いたりする。

↓
(応用) $u \rightarrow u + du$ で $x(u)$ が $x + dx$ に変化し、 $f(x)$ が $f + df$ に変化した、と考えれば、
前ページの (1) より、

$$\begin{aligned} df &\simeq \nabla_x f^T dx \\ &\simeq \nabla_u f^T du \stackrel{\text{上(1)より}}{=} \nabla_x f^T J_{x(u)} du \end{aligned} \xrightarrow{\text{よって}} dx \simeq J_{x(u)} du \text{ と書けるので、(f に関係なく)}$$

du, dx とは 0 に近づく時

u の微小変化 du と x の微小変化 dx の関係の極限が

$$dx = J_{x(u)} du \text{ であること意味する。}$$

$x \Leftrightarrow u$ という変数変換の時、あちこちでこの式が出てくる。

積分の時は必須なので、その時思い出そう。

極座標、～変数変換入門.

$x \in \mathbb{R}^2$ に対し、ユークリッド座標 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{matrix} e_2 \\ \uparrow \\ (x,y) \\ \downarrow \\ e_1 \end{matrix}$ $(x = xe_1 + ye_2)$ ということと意味する。
これと、

$\begin{cases} r := \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta := \text{ベクトル } x \text{ の (正の) } x \text{ 軸からの角度 (偏角と言ふ)} \end{cases}$
 とすると、 $x \neq 0$ として

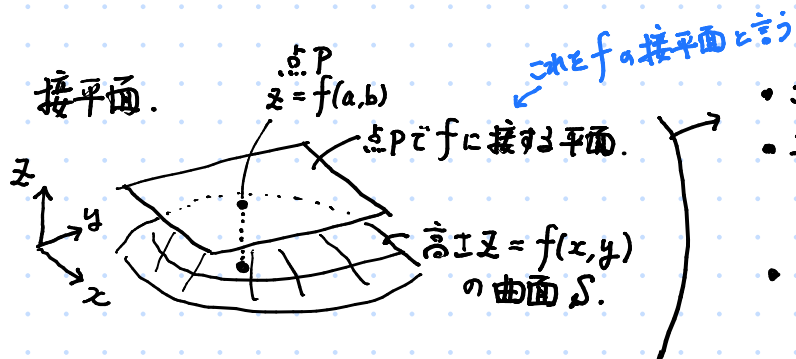
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xleftrightarrow{1対1} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$
 の対応関係がある。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$

$\rightarrow$ 具体的には、 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ と書ける。

$\leftarrow$ 大抵はラジアンを使うよ。

この事実を利用して、

点 x を (r, θ) という座標で表すことができ、これを極座標表示などと呼ぶ。



• この状況で、曲面 S の点 P での勾配は $\nabla f(a, b)$.

• 平面の式はそもそも一般に

$$z - z_0 = c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ と書ける. } (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

• この平面が点 P で f に接する条件は

$$\begin{cases} \text{勾配 } \mathbb{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ が } S \text{ の勾配 } \nabla f(a, b) \text{ と一致する} \\ \text{点 } P \text{ を通る} \end{cases} \text{ の2つである.}$$

$\Rightarrow$ 接平面 $\mathcal{H}$

$$z - f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \text{ となる}$$

$\leftarrow$ 教. p 89. 定理 4.2.6 の式.