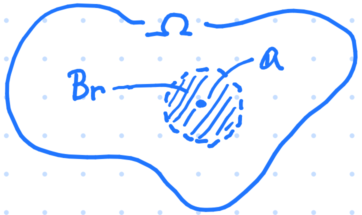
§4-1 多変数函数と偏微分 〜 今までは函数は $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ だったけど、ここからは違うよ!!

入力値が2つある!!

多変数函数：入力値が数字2つ以上に相当する函数のコト. → 例. $f(x,y)=e^x(3+y^2)$, $x,y\in\mathbb{R}^1$ の場合など.

開集合Ω：$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ が開集合である $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists B_r:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$, $^\forall a\in\Omega$, s.t. $B_r\subset\Omega$.

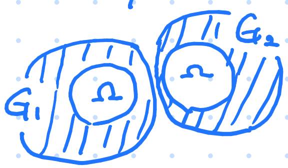
言っているコト.



どんな $a\in\Omega$ に対しても、aを中心とする球B_rでB_rがすっぽりΩに含まれるようなものが必ず存在する.

- 連結である開集合(≠空)を領域ともいう. → 数学者はこの単語をよく使うよ.
- Ωが閉領域 $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\Omega-\partial\Omega$ が領域

境界∂Ωを除去するというコト.



のように、$G_1\cap G_2=\emptyset$ な G_1,G_2 でΩを中に含み、$G_1\cap\Omega\neq\emptyset$, $G_2\cap\Omega\neq\emptyset$ の時、Ωは「不連結」.
これが不可能ならΩは連結と定義する.

n次元値の入力から、1次元値を出力する

多変数函数の極限：$\lim_{x\to a}f(x)=c$ for $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ とは、

$x\in\mathbb{R}^n$ がどのように a に近づいても $f(x)$ が c に近づく というコト.

→ $x\to a$ への近づき方で $f(x)$ が異なった値に見える例が教p.80の例題4.1.1に有るよ. この例は「収束しない例」というコトになるね.

↓

まじめにギロンするならば、

"$^\forall\varepsilon>0$ に対して $^\exists\delta>0$ が存在して、
$\|x-a\|<\delta$ とすれば
$|f(x)-c|<\varepsilon$ が成り立つ" $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=c$

→ これが悪名高き ε-δ論法 だ. とりあえず忘れて良い.

ちなみに…
教p.82 例題4.1.3 は $\begin{cases}\varepsilon=4r^2,\\ \delta=r\end{cases}$ としているコトに相当する.
つまり $^\forall\varepsilon>0$ に対し、$^\exists\delta:=\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ とすれば、
$\|x-a\|<\delta$ の時
$|f(x)-c|<\varepsilon$ が成り立つ、と言っている.

であるので、どうしても！という場合はこのスタイルで色々調べるコトになる.

このギロンの簡略版として、
$\|x-a\|=:r$ として、
$\lim_{r\to 0}f(x)=c$ をギロンするという手がある.
(教p.82 例題4.1.3 はそうしている)

多変数函数の連続性：$\underset{\text{函数}}{f(x)}$ が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\iff} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
ただし、$x \in \mathbb{R}^n$.

偏微分：多変数函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots x_n)$ に対し、x_k 以外を変えない函数 $g(x_k) := f(\overbrace{x_1, \cdots, x_{k-1}}^{\text{これらの値は固定される}}, \underbrace{x_k}_{\text{変えられるのはこれのみ.}}, \overbrace{x_{k+1} \cdots x_n}) $ として、

x_k での g の微分値 $\frac{dg}{dx_k}$ が存在する時、これを f の x_k による偏微分と言い、$\frac{\partial f}{\partial x_k}$ と書く. → 手を抜いて f_{x_k} と書いたりも.

まあ、$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \lim_{x_k \to a_k} \left(\frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1} \cdots a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{x_k - a_k} \right)$ だ.

x が x_k の方向にのみ動く時の傾き $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_k) - f(x)}{\varepsilon}$ とらえると良いだろう.
(ベクトルだと e_k)

例. $f(x,y) = x^2 y + x^3$ に対して、$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$ （計算は簡単…）

gradient
勾配：多変数函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ に対し、$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル}}$ を $\underbrace{\nabla f}_{\text{使えるとなにかと便利.}}$ とか $\mathrm{grad} f$ と書き、f の勾配と呼ぶ.

例. $f(x,y,z) = x^2 y z^3 + yz$ に対し、$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xyz^3 \\ x^2 z^3 + z \\ 3x^2 y z^2 + y \end{pmatrix}$.