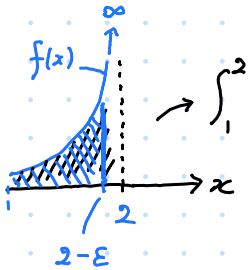
§3.3 広義積分 〜 $x<b$ の $f(x)$ は大丈夫だけど $x=b$ ではちょっと… という時に積分 $\int^b f(x)dx$ を考える.

例. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$x\to 2-0$ で $f\to +\infty$ に ふっとぶ!!



→ $\int_1^{2-\varepsilon} f(x)dx$ は確実に存在して、$\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^{2-\varepsilon} = -2\sqrt{\varepsilon}+2$ と計算もできる.(ただし $0<\varepsilon\ll 1$)

しかし $\int_1^2 f(x)dx$ は $x\to 2$ で $f(x)\to\infty$ なので どう考えれば良い?

→ 代わりに、$\int_1^{2-\varepsilon} f(x)dx$ を考えて、$\lim_{\varepsilon\to 0}$ をみてみたら良いのでは? → 明らかに $\underline{2}$ に成る. → これが広義積分.

↙まじめに書くと、

$(a,b]$ とか (a,b) でも同様.

$x=b$ を含んでいないコトに注意.

<u>def.</u> $f(x)$ が $x\in[a,b)$ で連続で、$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ が存在する時、これを $\int_a^b f(x)dx$ と書いて広義積分と言う.

b が ∞ の場合も.

そもそも定積分は「閉」区間で定義されるもので あるので、端が「開」の場合は 広義積分なのだ.

例. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(1-\frac{1}{R}\right) = 1.$

← これが困るので…

まあ、具体的に計算できる時は、たいていは 広義積分であることをそんなに意識しなくても困らない.
この場合は
$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$ とやってしまっても良いわけで.

では、具体的な計算に頼れない場合は?

→ 次のページへ!!

↙ 具体的に計算できない時はどうする？

広義積分が成り立つかどうか？の判定法を用いて考える.

下記に2つほど記す.

① 広義積分の存在：函数 $f(x)$, $g(x)$ が

1. $[a, b)$ で連続で、$|f(x)| \leq g(x)$.
2. 広義積分 $\int_a^b g(x)\,dx$ が存在する.

$\Rightarrow$ 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する.

教 p.70 のガンマ函数 $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$ が広義積分として存在することを示す例が有る. 他にも、

ベータ函数 $B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p, q > 0)$ にも使われるね.

↓ ちなみに…（覚えておくと便利な時が）

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \quad n:\text{自然数})$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

② 広義積分の非存在：函数 $f(x)$, $g(x)$ が

1. $[a, b)$ で連続で、$0 \leq g(x) \leq f(x)$.
2. 広義積分 $\int_a^b g(x)\,dx$ が存在しない.（発散する）

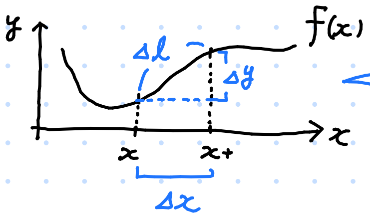
$\Rightarrow$ 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は存在しない.（発散する）

例. $\int_2^\infty \frac{1}{(x(x-1))^{1/3}}\,dx$ は？ $x^{-2/3} = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} < \frac{1}{(x(x-1))^{1/3}}$ で $\int_2^\infty x^{-2/3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R x^{-2/3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[3x^{1/3}\right]_2^R = \lim_{R\to\infty} (3R^{1/3} - 3\cdot 2^{1/3})$

$= \infty$（発散）の為. $\int_2^\infty \frac{1}{(x(x-1))^{1/3}}\,dx$ も発散する.

§3.4 定積分の応用 〜 曲線の長さ.

① 函数 $f(x)$ の曲線の長さ: $y=f(x)$ と書ける時、曲線 $C: y=f(x)$ の $a\leq x\leq b$ での長さは $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$ である.

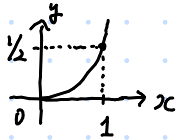


$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$ より, $dl = \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$.

② 曲線 C が $(x(t), y(t))$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ とパラメータ表示される時の曲線 C の長さは $\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ である.

(① 同様に考えて) $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t$ とすると分かる.

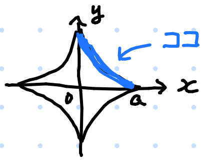
例(教p.76の例1). 曲線 $C: y=\frac{x^2}{2}$ の $0\leq x\leq 1$ の長さ.



$l = \int_0^1 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\left\{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right\}-\left\{0+\ln|1|\right\}\right] = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right\}$.

#3-1-2 より

例. アステロイド曲線 $C: \left(\overset{x(t)}{\overset{\shortparallel}{a\cos^3 t}}, \overset{y(t)}{\overset{\shortparallel}{a\sin^3 t}}\right)$, $0\leq t\leq 2\pi$. の長さ.



ココのみ計算して4倍する.

面倒なので. $c(t)=\cos(t)$, $s(t)=\sin(t)$ と略している.

$l(C) = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\sqrt{c^4s^2+s^4c^2}\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\sin(t)\cdot\cos(t)\,dt = 6a\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = 3a\left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} = 6a$ //.