

fact. 有理式 $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ ($P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ 共通因子を持たない多項式) に対して.

$$P(x) = \prod_i (x - \alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_j (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j} \quad (\text{ただし } \alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}, m_i, n_j \in \mathbb{N}) \quad \text{と } P \in \mathbb{Q}[x] \text{ 因数分解する.}$$

これを用いて $\frac{Q}{P}$ を部分分数展開して.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \underbrace{\text{多項式}}_{\substack{\text{そのまま} \\ \text{積分できる}}} + \sum_i \frac{\tilde{\alpha}_i}{(x - \alpha_i)^{m_i}} + \sum_j \frac{\tilde{\beta}_j x + \tilde{\gamma}_j}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}} \quad \text{と変形できる. } \int \frac{Q(x)}{P(x)} dx \text{ に対しては以下のように計算可能.}$$

$$\frac{\tilde{\beta}_j}{2} \frac{(2x + \beta_j)}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}} + \frac{-\frac{1}{2}\tilde{\beta}_j\beta_j + \tilde{\gamma}_j}{\left((x + \frac{\beta_j}{2})^2 + (\gamma_j - \frac{\beta_j^2}{4})\right)^{n_j}}$$

$\downarrow \int \cdot dx$ $\downarrow \int \cdot dx$ $X := x + \frac{\beta_j}{2}, a^2 = \gamma_j - \frac{\beta_j^2}{4} (>0)$ として

$$\frac{\tilde{\beta}_j}{2} \frac{1}{(-\tilde{n}_j+1)} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{-\tilde{n}_j+1} + (-\frac{1}{2}\tilde{\beta}_j\beta_j + \tilde{\gamma}_j) \int \frac{1}{(X^2 + a^2)^{\tilde{n}_j}} dx$$

$\downarrow$ $I_n := \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ は特別な計算方法がある. (→ 左の☆)

☆ 漸化式に持ち込んで計算する方法

例. $\int \frac{1}{x^3-1} dx = \int \frac{1/3}{x-1} dx + \int \frac{(-1/3)(x+2)}{x^2+x+1} dx$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \left\{ x \cdot \frac{1}{(-n+1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{(-n+1)(x^2 + a^2)^{n-1}} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x}{(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \quad \text{よって} \\ I_n &= \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot I_{n-1} \quad \text{との漸化式を得る.} \\ \text{そして, } I_1 &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad \text{なので, 順番に } I_2, I_3, \dots, I_n \text{ を求めることができる.} \end{aligned} \right.$$

他にも, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \times \begin{cases} \pi/2 : n = \text{偶} \\ 1 : n = \text{奇} \end{cases}$ も導出できる. (教. p. 65 例題 3.2.1)

ただし, $n!! = n(n-2)(n-4) \dots \times \begin{cases} 2 : n = \text{偶} \\ 1 : n = \text{奇} \end{cases}, 0!! = (-1)!! = 1.$

① 三角関数の有理式の積分 $\sim t := \tan \frac{x}{2}$ とおくと、
$$\begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \quad (\Leftrightarrow \int \cdot dx = \int \cdot \frac{2}{1+t^2} dt) \end{cases}$$
 であるのでこれを利用すれば良い。

例1. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \ln|t| + C = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C //$

例2. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+2t+t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \left(1 + \frac{2t}{t^2+1}\right) dt = t + \ln|t^2+1| + C = \tan \frac{x}{2} + \ln|\tan^2 \frac{x}{2} + 1| + C //$

② 1次無理式 $(ax+b)^{\frac{1}{n}}$ を含む有理式 $\sim t := (ax+b)^{\frac{1}{n}}$ とおくと
$$\begin{cases} x = \frac{t^n - b}{a}, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{n}{a} t^{n-1} \quad (\Leftrightarrow \int \cdot dx = \int \cdot \frac{n}{a} t^{n-1} dt) \end{cases}$$
 であるのでこれを利用する。

③ 2次無理式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ “ $\sim t := \begin{cases} \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x : a>0 \text{ の場合} \sim (a_+) \\ \sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} : a<0 \text{ の場合. ただし, } \alpha, \beta \text{ は } ax^2+bx+c=0 \text{ の 2つの実数解.} \end{cases}$ としこれを利用する。

さらに,

(a₊) の場合、 $t - \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{a}xt + ax^2 = ax^2+bx+c \Leftrightarrow x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}, \frac{dx}{dt} = \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(b+2\sqrt{a}t)^2}$ この場合必ず成立する。

(a₋) の場合、 $t^2 = \frac{a(x-\alpha)}{x-\beta} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha t^2 - \alpha\beta}{t^2 - a}, \frac{dx}{dt} = \frac{-2a(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}$

例. $\int \sqrt{x^2+a} dx$ において③を用いて、 $t := \sqrt{x^2+a} + x$ とおくと $\sqrt{x^2+a} = t-x = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}, \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+a}{2t^2}$ より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+a} dx &= \int \frac{t^2+a}{2t} \cdot \frac{t^2+a}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2+a)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2a}{t} + \frac{a^2}{t^3}\right) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}t^2 + 2a \ln|t| - \frac{a^2}{2t}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a \ln|\sqrt{x^2+a} + x| + C // \end{aligned}$$

ここで、 $t^2 - \frac{a^2}{t^2} = \frac{t^4 - a^2}{t^2}$
 $= \frac{t^2+a}{t} \cdot \frac{t^2-a}{t}$
 $= 2\sqrt{x^2+a} \cdot 2x = 4x\sqrt{x^2+a}$