§3 積分 〜 微分の逆操作

def. 不定積分 or 原始函数： 函数 $f(x)$ に対し、$\dfrac{dF}{dx} = f$ となる函数 $F(x)$ を言う. この時、$F(x) = \int f(x)dx$ と書いたりする.

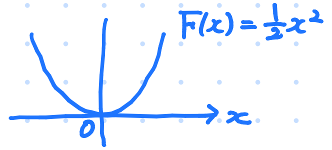
注： $F = \int f\,dx$ の時、$\tilde{F} := F + \underset{}{\overset{\text{任意の定数}}{C}}$ とすると $\dfrac{d\tilde{F}}{dx} = \dfrac{dF}{dx} = f$ となるので、$\tilde{F}$ も f の不定積分になっている.

つまり、不定積分には任意の定数を足せる自由度がある（この定数を積分定数と呼ぶ）.

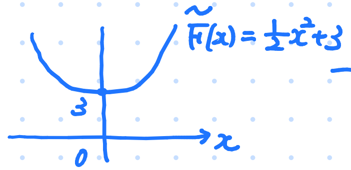
逆に、不定積分には、積分定数の自由度しか無いコトも分かっている. つまり、$\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{d\tilde{F}}{dx} \Rightarrow F(x) = \tilde{F}(x) + \overset{\text{何らかの定数}}{C}$ で、

$F(x)$ と $\tilde{F}(x)$ の函数の「形」は同じなのだ。

例.



$\rightarrow \dfrac{dF}{dx} = x$



$\rightarrow \dfrac{d\tilde{F}}{dx} = x$

同じ!

そこで…

$f(x)$ に対して不定積分を求める時はなるべく

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

とCをつけて表記して、

変な計算ミスをしないようにするのが良い.
（後々重要なのだ）

不定積分の例.

$\int \cdot\, dx$ は $\dfrac{d}{dx}$ の"逆"と思うと良い.

・三角函数： $\sin(x) \underset{\int dx}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} \cos(x)$ なので、$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$.

他にも、$\int \dfrac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$ なども.

ノート#2-1-2を見よう

$\arcsin(x) \xrightarrow[\frac{d}{dx}]{} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$, など…

教科書 P.60に たくさんのっている. ある程度覚える必要あり.

・多項式： $\begin{cases} x^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} n x^{n-1} \\ \ln|x| \xrightarrow{\;\;''\;\;} \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} & : n \neq -1, \\ \ln|x| & : n = -1. \end{cases}$

たとえば. $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3} x^{3/2} + C$.

・指数函数： $\underset{(a>0\text{として})}{a^x} = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x \Rightarrow \int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$

基本的な不定積分（教科書 p.60 相当）
（一部解説つき）

$f(x)$	$F(x)=\int f(x)dx$
$x^a \ (a\neq -1)$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\ln x$	$x\ln x - x$
(以降, $a\neq 0$). $\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ → ①
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ → ②
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$ → ③
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$ → ④
$\sqrt{x^2+a}$	$\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a}+a\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert\right\}$ → ③と同じノリで.

① $y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \Leftrightarrow \tan(ay)=\frac{x}{a}$ より $\frac{d}{dx}$ を両辺に作用させて

$$\frac{d}{dx}\tan(ay)=\frac{d}{dx}\frac{x}{a}$$

$$\frac{d\tan(ay)}{dy}\frac{dy}{dx} = a\cdot\frac{1}{\cos^2(ay)}\cdot\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{x}{a}=\frac{1}{a}$$

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2}\cos^2(ay)=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\tan^2(ay)}$$
$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+x^2/a^2}=\frac{1}{x^2+a^2} \ /\!/$$

② $y=\arcsin\frac{x}{a} \Leftrightarrow \sin y=\frac{x}{a} \Rightarrow \cos y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a\cos y}$.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{a\sqrt{1-x^2/a^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ /\!/$$

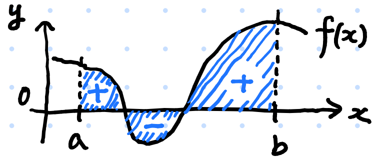
③ $$\underbrace{\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot 1\,dx}_{I}=\sqrt{a^2-x^2}\cdot x+\int\cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(\cancel{-2}x)\cdot x\,dx$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\underbrace{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{I}+a^2\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}_{=\arcsin\frac{x}{a}}$$
$$\Rightarrow 2I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a} \ /\!/$$

④ $$\frac{d}{dx}\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}\cdot\underbrace{\left(1+\cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\cdot\cancel{2}x\right)}_{=\cancel{(x+\sqrt{\ })}/\sqrt{\ }}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \ /\!/$$

def. 定積分: 函数 $f(x)$ の不定積分が $F(x)$ の時、$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$ と書き、これを $f(x)$ の a から b までの定積分と言う.

数学では、$F(b)-F(a)$ を $\left[F(x)\right]_a^b$ と書いたりするよ.

この意味は?



実は $\int_a^b f(x)\,dx$ は、$f(x)$ と x軸で囲まれた部分 (ただし $a \le x \le b$) の面積 に一致する.

ただし、
① $f \le 0$ の時、その面積は負の値とする.
② $a > b$ の時、$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$ とする.

さらに言うと、

定積分による不定積分の表現

一般に、$\widetilde{F}(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ とすると、この $\widetilde{F}(x)$ は $f(x)$ の不定積分である.

$f(x)$ の真の? 不定積分を $F(x)$ とすると、
定積分の定義から $\widetilde{F}(x) = F(x) - F(c)$.
よって、$\frac{d}{dx}\widetilde{F}(x) = \frac{d}{dx}\left(F(x)-F(c)\right) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.
よって $\widetilde{F}(x)$ も $f(x)$ の不定積分.

・積分の分割, 線形性 等: (不定/定) 積分に対して.

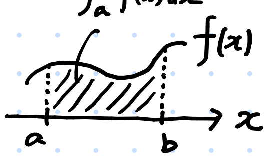
分割: $a < {}^\forall c < b$ に対して、$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. ← 定義より明らか

線形性: $\int \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right) dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx$ for 定数 c_1, c_2.

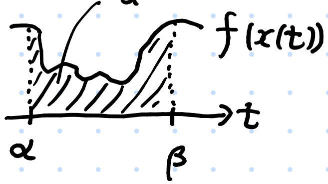
積分を計算する為のいくつかのテクニック.

① 変数変換：(置換積分)

$\int_a^b f(x)dx$ ⟵ そのママだと一致しない ⟶ $\int_\alpha^\beta f(x(t))dt$



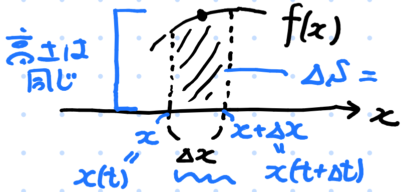
$x=x(t)$ として $\longrightarrow$ 変数変換



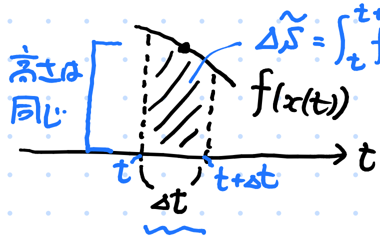
⇩ 拡大　　　⇩ 拡大

$x=x(t)$

$x+\Delta x = x(t+\Delta t)$



$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} f(y)dy \simeq f(x)\cdot\Delta x$



$\tilde{\Delta S} = \int_t^{t+\Delta t} f(x(z))dz \simeq f\cdot\Delta t$ なので、

$\tilde{\Delta S} \times \frac{\Delta x}{\Delta t} = \Delta S$ とできる.

つまり？ $\tilde{\tilde{\Delta S}} := \int_t^{t+\Delta t} f(x(z))\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}dz = \Delta S$ とできる. $\xrightarrow{\text{つまり？}}$ 積分の変数変換公式

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}dt = \int_a^b f(x)dx$$

となる.

ただし、$\begin{cases} a = x(\alpha), \\ b = x(\beta). \end{cases}$

例1. $\int_a^b c^x dx$ に対して、$x=x(t)$ を $c^x = e^t$ になるように決めると、$c^x = e^{x\ln c}$ より $x\cdot\ln c = t$. よって $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\ln c}$ であり、

$$\int_\alpha^\beta e^t\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta e^t\cdot\frac{1}{\ln c}dt = \left[\frac{1}{\ln c}e^t\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\ln c}\left[c^x\right]_a^b = \frac{1}{\ln c}(c^b - c^a).$$

$x(t) = \frac{1}{\ln c}t$ なので、$\begin{cases} a = \frac{1}{\ln c}\alpha, \\ b = \frac{1}{\ln c}\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^a = e^\alpha \\ c^b = e^\beta \end{cases}$ ← ★

$e^t = c^x$ と ★を用いて

例2. $\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\cdot\sin x\,dx = -\int_0^{\pi/2} f(u(x))\frac{du}{dx}dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

$u = \cos x$ とすると　$\frac{du}{dx} = -\sin x$ なので、$f(u(x)) = u^2$ とみると

② 部分積分： $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'\cdot g + f\cdot g'$ であり、この両辺を積分すると、$f\cdot g = \int (f'g + fg')\,dx$.

↙ よって

部分積分公式 $\int f(x)g'(x)\,dx = f\cdot g - \int f'(x)g(x)\,dx.$ ← けっこう使い途があるので覚えておこう.

例1. $\int_0^1 \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{2x}}_{g'}\,dx = \left[\underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g=\int g'dx}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{g}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}.$

f, g' としている.

例2. $\underbrace{\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\sin x}_{g'(x)}\,dx}_{☆} = \left[-\overset{f}{\cos^2 x}\cdot\overset{g}{\cos x}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\overset{f'}{2\cos x\cdot(-\sin x)}}\cdot\underbrace{\overset{-g}{\cos x}}\,dx$

$f(x)$, $g'(x)$ としている.

$= -1 - 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\cdot\sin x\,dx}_{☆}$ となるので、$3☆ = 1.\Rightarrow ☆ = \frac{1}{3}.$

左辺と同じ!