§2-4. Taylor展開

$a=0$ の時、マクローリンの定理とも言う.

Th. Taylorの定理.　関数 $f(x)$ が 開区間 I で n 階微分可能で、$a, x \in I$ とすると、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n}_{\text{この項のみ } R_n \text{ と書くコトも.}}$$

が a と x の間の $^{\exists}c$ に対して成り立つ.

この右辺を $f(x)$ の a における Taylor展開と言うよ.

f の x での値 $f(x)$ を、$f(a), f'(a), f''(a), \cdots$ をもとに ほぼ 計算できるよ!! という定理.

c が分からないので、$f^{(n)}(c)$ は求まらない為.

(注) Taylor展開は、上の R_n がとても小さい $\simeq$ 無視できる という状況で利用するコトを狙うものである.

例. e^x の 0 における Taylor展開は、$^{\forall}n \geq 1$ に対して、

$\exp(x) \overset{\text{def}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ であるコトを思い出そう.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k e^x \right)\Bigg|_{x=0} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (x-0)^k + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\alpha x} \cdot x^n}{n!}$$

, ただし $0 < \alpha < 1$.

この α は x を決めると決まり、かつ、x によって異なる.

ランダウの記号: o (スモールオー) と O (ラージオー).

$x \to a$ で $f(x) = o(g(x)) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ → $x \simeq a$ で f の方が g よりも速く 0 に近づくコトを意味する.

〃 $f(x) = O(g(x)) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{\text{有限な値}}{C}$ → $x \simeq a$ で f と g が同じ速さで収束するコト 〃.

ラージオー O の方が多くの情報を持っているので、なるべくこちらを使った方が良い.

例. $x \to 0$ で $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\begin{cases} o(x^{n-1}) & \text{スモールオー} \\ O(x^n) & \text{ラージオー} \end{cases}}$

→ スモールオー $o(x^{n-1})$ は、R_n ($\leq x^n$) は x^{n-1} よりも速く $x \to 0$ で 0 に近づくコトを、

→ ラージオー $O(x^n)$ は $R_n \sim x^n$ は $x \to 0$ で x^n と同じ速さで収束するコトを、

各々言っている.

$e^{\alpha x} x^n / n! = R_n$ を評価している → $R_n \sim x^n$ を考えると…