§2.3 高次(高階)の導函数

$f^{(2)}(x)$ や、$f''(x)$ と書いたりも、

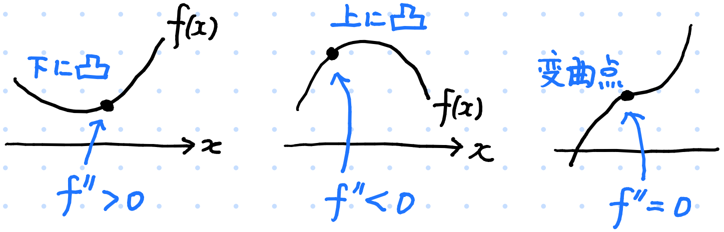
$y=f(x)$ の導函数 $\frac{df}{dx}$ ($=f'(x)$) がさらに微分可能な時、$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$ を f の2階導函数と言う。 → このくり返しで n 階…を定義。

def. 函数 $f(x)$ が C^n 級である $\overset{def}{\iff}$ $f(x)$ が n 階微分可能で、$f^{(n)}(x)$ が連続。 → 重要なのだ。

高階微分の応用例

・函数の凹凸

2階微分 f'' の符号でその函数の凹凸が分かる。



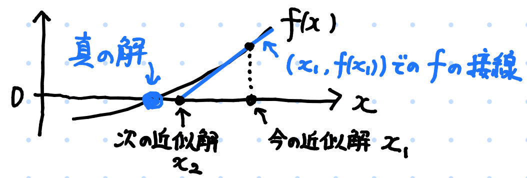
注) 変曲点 ⇒ $f''=0$ だが 逆は必ず成り立つわけではないコトに注意。

↓ 極値の性質や、増減表に役に立つよ。

教p.44の例題2.3.1を見てみよう。

ただし、失敗するケースも有る。また、あまり手計算向きではない。(コンピュータにやらせると良い)

・Newton法 ~ $f(x)=0$ の解の近似値をどんどん改善できるよ。



左の図から分かるように、今持っている近似値 x_1 に対して、$(x_1, f(x_1))$ を通る f の接線が $y=0$ と交わる点の x を x_2 とすると、x_2 は x_1 よりも $f(x)=0$ の真の解に近いと期待できる。

↓よって

x_2 はこの連立eq.を満たす x

$$\begin{cases} \text{接線の式} & y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \\ y=0\text{の式} & y=0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

で計算する。 → あとは $x_3=x_2-\cdots$, $x_4=x_3-\cdots$, $x_5=\cdots$ とくり返せば良い。

Newton法の中に f'' etc. は登場しないが、その性質を調べる時に f'' が必要になる。まあ、今は気にしなくても良い。

ライプニッツの公式： n階微分可能な函数 $f(x)$, $g(x)$ に対し、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad /\!/$$

→ 注. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}_nC_k$.

例. $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (fg) = \binom{2}{0} f g'' + \binom{2}{1} f'g' + \binom{2}{2} f''g = fg'' + 2f'g' + fg''$

$\parallel$

$\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}(fg)\right) = \frac{d}{dx}(fg' + f'g) = (fg'' + f'g') + (f'g' + f''g) = fg'' + 2f'g' + f''g$

(上の公式を用いない計算)