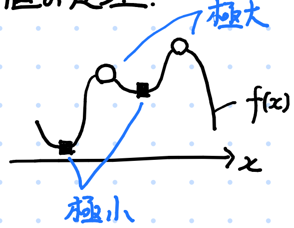
§2.2 平均値の定理.

極値.



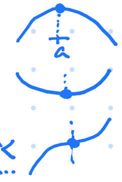
$f(x)$が $x=a$で極大 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $f(x)<f(a)$ for $^\forall x\in I$ $(x \neq a)$, $^\exists I$ s.t. $a\in I$. "aに十分近い$x \neq a$では $f(x)<f(a)$" と言っている.

(極小も同様)

- この時の値を極大値という.
- 極大値と極小値を合わせて極値と言う.
- 極大な点は最大な点の候補. (極小は最小の…)

Th. $f(x)$が $x=a$で極値をもつ $\Rightarrow$ $f'(a)=0$.

ただし、



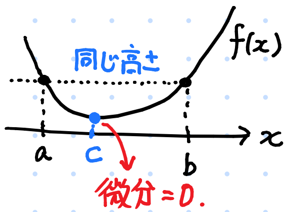
$$\left(\begin{array}{ll} \text{極大} & \Rightarrow f'(a)=0 \\ \text{極小} & \Rightarrow f'(a)=0 \\ \text{極値でなくとも…} & \Rightarrow f'(a)=0 \end{array}\right)$$

なので「$f'(a)=0 \Rightarrow f$が$x=a$で極値」は成立しないコトに注意.

Th. ロルの定理. (Rolle) 関数$f(x)$が

$$\left\{\begin{array}{c} [a,b]\text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b)\text{で微分可能} \\ \text{かつ} \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow a<{}^\exists c<b \text{ s.t. } f'(c)=0.$$

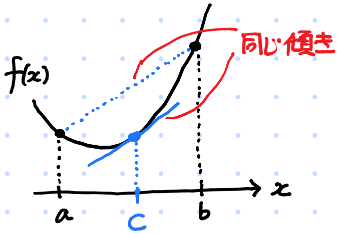
ロルの定理は平均値の定理で $f(a)=f(b)$とした場合に相当する.



Th. 平均値の定理. 関数$f(x)$が

$$\left\{\begin{array}{c} [a,b]\text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b)\text{で微分可能} \end{array}\right\} \Rightarrow a<{}^\exists c<b \text{ s.t. } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

平均値の定理はCauchyの平均値の定理で $g(x)=x$ とした場合に相当する.



Th. Cauchyの平均値の定理. 関数$f(x), g(x)$が

$$\left\{\begin{array}{c} [a,b]\text{で連続} \\ \text{かつ} \\ (a,b)\text{で微分可能} \\ \text{かつ} \\ g(a)\neq g(b) \\ \text{かつ} \\ f', g'\text{は同時には0にならない} \end{array}\right\} \Rightarrow a<{}^\exists c<b \text{ s.t. } \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Th. ロピタルの定理. 函数 $f(x), g(x)$ は $x=a$ の近くで微分可能とする.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \quad \text{かつ} \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g} = \dfrac{0}{0}$ の形になって困る時でも、

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'}{g'}$ を計算して値が求まるならば それが答!! という、ありがたい定理.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ は、$\dfrac{0}{0}$ の形になるので困るが、ロピタルを用いると、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{1} = 1$ となり、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ と分かる.

座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のコト. これを「曲線 C のパラメータ t による表示」という.

(ちょっとした応用) 曲線のパラメータ表示: $\overset{\text{連続な函数}}{f, g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を使って、平面上の $\overset{\text{連続な}}{\text{曲線}\, C}$ 上の点が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ と表わされるとする.

$$\left\{\begin{array}{l} f, g \text{ が微分可能, かつ} \\ f', g' \text{ が連続, かつ} \\ \quad f'(c) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f(c)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f(t)} = \frac{d}{dx} g(f^{-1}(x)) = \frac{d\,g(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = g'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left.\frac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}$$ として理解できる.

合成 $g\circ f^{-1}$ に対する微分

$t=f^{-1}(x)$ なので逆函数の微分を使って