

2.1 関数の微分

函数

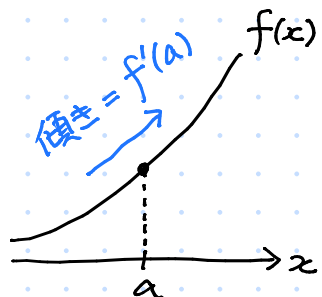
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $x=a$ で微分可能 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の値が存在する.

この値を $f'(a)$ と書き、

f の $x=a$ での微分値とか微分係数と言う。

$x \rightarrow a$ で分母 $\rightarrow 0$ は事実なので、この limit 値が存在するならば分子 $\rightarrow 0$ となる必要がある。つまり、 $f(x) \rightarrow f(a)$ となるので、

f が $x=a$ で微分可能 $\Rightarrow f$ が $x=a$ で連続
 ということを意味している。(教科書 Th 2.1.1)



$x \in$ 区間 I で微分可能なとき、

$f'(x)$ for $x \in I$ を $f(x)$ の導函数というよ。 $\rightarrow f'(x)$ の代わりに $\frac{df}{dx}$ と書いたりもするよ。

$c \in \mathbb{R}$ は定数として。

Th 2.1.3 函数 f, g が $x=a$ で微分可能ならば $cf, f \pm g, fg, f/g$ のいずれも $x=a$ で微分可能で、

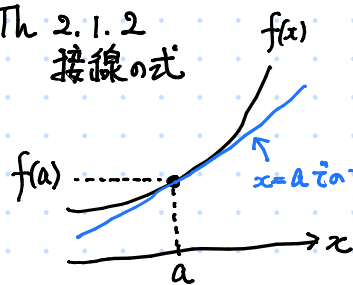
1. $(cf)' = c \cdot f'$, 2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
3. $(fg)' = f'g + fg'$,
4. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$. $\leftarrow$ ただし、 $g(a) \neq 0$ とする。

3. を確かめてみる。

$$\begin{aligned} (fg)' &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \right) \{ \underbrace{f(x)g(x) - f(a)g(x)}_{\text{first term}} + \underbrace{f(a)g(x) - f(a)g(a)}_{\text{second term}} \} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) g(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad // \end{aligned}$$

$\rightarrow$ 4. も同様に確かめてみよう!!

Th 2.1.2
接線の式



$\left\{ \begin{array}{l} \text{傾き} = f'(a) \text{ である} \\ (a, f(a)) \text{ を通る} \end{array} \right\}$

この2つの条件から
この接線の式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

と定まる。



Th. 2.1.4 函数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、その合成 $g \circ f$ を考える。記号が分かり易いように $y = f(x), z = g(y)$ ($\Leftrightarrow z = g(f(x)) = g \circ f(x)$) とすると、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ である。}$$

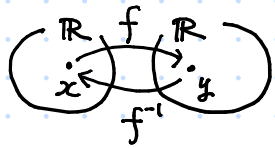
$$\frac{dz}{dx} \Big|_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

例4. $\frac{d}{dx} ((\cos x)^2) = \frac{d(y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \leftarrow y = \cos x$ として。

$$= 2y \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$= \lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g(b)}{y-b} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y-b} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = g'(b) \cdot f'(a) \quad // \quad (b = f(a))$$

Th 2.1.5 逆函数の微分. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $x=a$ で微分可能で、 $f'(a) \neq 0$ とする。すると $f'(a)$ に十分近い y において f の逆函数 f^{-1} が存在する。



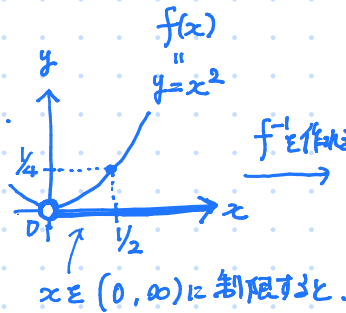
この f^{-1} は $y = f(a)$ で微分可能で、その時

$$\frac{d(f^{-1})}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} \quad \text{である.}$$

↓
 $\left\{ \begin{array}{l} \cdot f'(a) \neq 0 \text{ であるので } f \text{ は } x=a \text{ で連続.} \\ \cdot f'(a) \neq 0 \text{ であるので, } a \text{ に十分近い } x \text{ 上で } f(x) \text{ は単調.} \end{array} \right.$
 $\Rightarrow f^{-1}$ が存在. という仕組み.

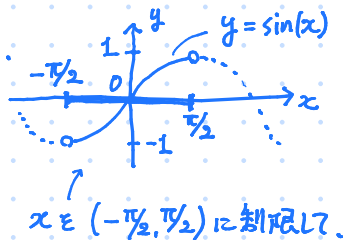
$$\frac{d(f^{-1})}{dy} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{x - a}{y - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} //$$

例 1.



この時. $\frac{d f^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} //$ ← y の函数に変形しないと
 いけないことに注意.

例 2.



この変形の向きには要注意!! この時は $\frac{df^{-1}}{dy}$ が
 ずっと正なのでこうなる.

$$\frac{d \sin^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d \sin(x)}{dx}} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} //$$

この 2-1 の内容は、少し練習すればすぐできるようになる。→ 教 p.30 の内容や、教 p.31 の図を解いてみよう。