§1-3. 初等函数

← このdef.がなぜか教科書にのってない…

def. 初等函数とは、

定数函数 $y=c\ (\in\mathbb{R})$, 1次函数 $y=x$, 指数函数 $y=e^x$, 正弦函数 $y=\sin(x)$

を基本とし、これらの間で

1. 和, 差, 積, 商　　2. 合成函数　　3. 逆函数

を作る操作を有限回組み合わせて得られるモノ。

このあとすぐ学ぶ。

集合　集合

函数 f を $X \xrightarrow{f} Y$, $x \mapsto y$, $y=f(x)$

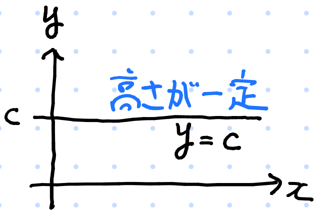
とらえる時の X を定義域, Y を値域とよぶのだ。

注) 初等函数は、その定義域のほとんどすべての点で微分可能である。

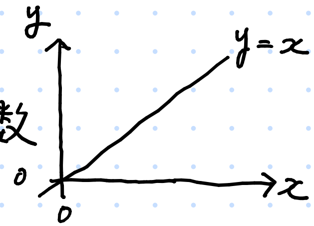
§2-1で学ぶ。先に知っておくと便利なのでココで書いた。

(一応)

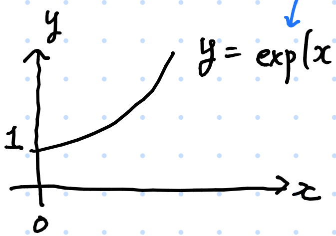
定数函数



一次函数



指数函数



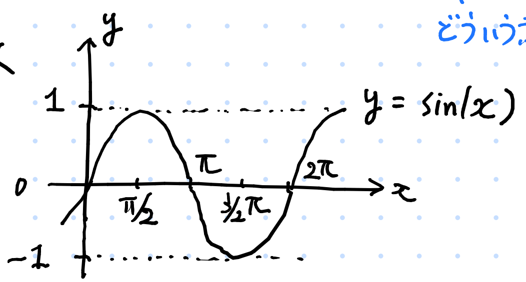
指数函数の表記

$$y=\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (=e^x)$$

eのx乗. eはネイピア数.

$x\in\mathbb{R}$の時は $\exp(x)=e^x$ だが、$x\notin\mathbb{R}$の時は $\exp(x)$ は e^x では無かったりする. 例えば行列Aに対して $\exp(A)$は定義できるが、e^Aはどういう意味になるかから考えないと…

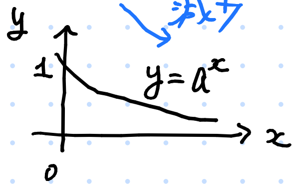
正弦函数



注) 一般に、$a>0$に対して a^x も指数函数とよぶコトがある。

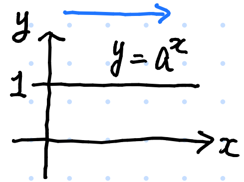
その時、$0<a<1$, $a=1$, $1<a$ の3通りで挙動が下図のように異なる。

減少



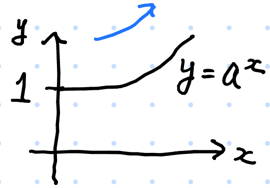
$0<a<1$ の場合

変化せず



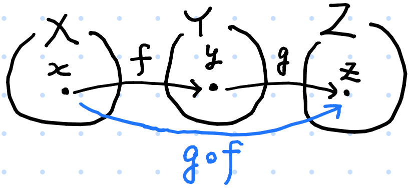
$a=1$ の場合

増加



$1<a$ の場合

函数の合成:



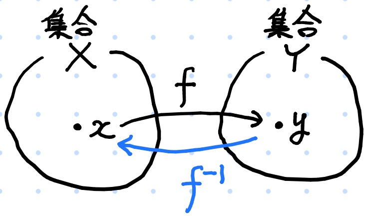
2つの函数 $f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$,
$g : Y \ni y \mapsto g(y) \in Z$ に対して

$g \circ f : X \ni x \mapsto g(f(x)) \in Z$ を f, g の結合, あるいは合成函数と言う。

$f \circ g$ では無いコトに注意しよう.

合成の結合則: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
($h : X \to W$ も考えて)

逆函数



$Y = \{ y = f(x), x \in X \}$ ($x \in X$ に対して $y = f(x)$ を全部集めたもの)

函数 $f(x)$ が $x \in X$ で定義されてい時、$Y = f(X)$ に対し
$y \in Y$ に対して定義される函数 $g(y)$ が存在して

① $X = g(Y)$ である,
② $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

の2つの条件を満たす時、 g を f の逆函数と言い、 $g = f^{-1}$ と書いたりする。

$A \Leftrightarrow B$ は「A ならば B であり, かつ, B ならば A である」と読む。

$A\Rightarrow B$ は A ならば B と読む。

函数の単調性： 函数 $f(x)$ に対し、 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ の時、fは単調増加すると言う。単調減少も同様。

狭義の

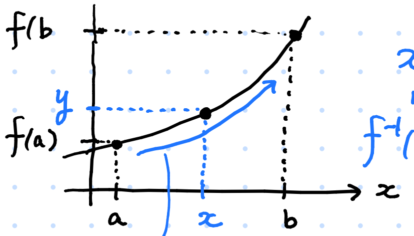
注) $\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ の時は 広義の単調増加 だ。

なお、「$x\in I$（区間）に限定して」のように限定された条件下でもこの概念は使える。

$\min(\alpha,\beta)$ を $\alpha\wedge\beta$,
$\max(\alpha,\beta)$ を $\alpha\vee\beta$ と書くコトがある。
慣れると便利だ。

Th.（連続で単調なら逆がある）

区間 $[a,b]$ で 函数 $f(x)$ が連続 かつ 単調 ならば、区間 $[\min(f(a),f(b)), \max(\,〃\,)]$ で定義される逆函数 f^{-1} が存在して連続である。//

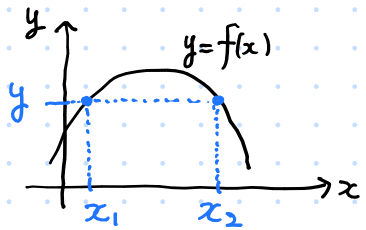


$$x \xrightarrow{f} f(x)$$
$$f^{-1}(y) \xleftarrow{f^{-1}} y$$

左の図からほぼ自明。

この連続性と単調性がポイント。

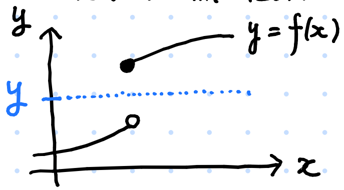
注) 単調性が無いために f^{-1} が存在しないケース



「函数の値（出力）は1つのみ」という制限下でのお話。この制限を外した「多価函数」というものもあるが、しばらくは扱わない。

異なる x である $x_1\neq x_2$ に対し $y=f(x_1)=f(x_2)$ であるため、このyに対して $f^{-1}(y)$ の値を1つに定めることができず、f^{-1} を定義できない。

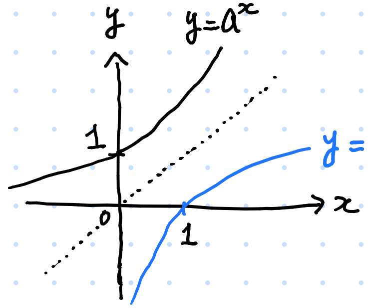
注) 連続性が無いために f^{-1} が存在しないケース



上図の y に対し、$y=f(x)$ となる x がそもそも存在しない。
よって、この y に対し $f^{-1}(y)$ を定義できない。

（いくつかの初等函数）

指数函数と対数函数：#1-3-1に書いたように、$0<a,\ a\neq1$ に対して指数函数 $y=a^x$ は $(-\infty,\infty)$ で連続かつ単調である。よって逆函数を持つ。
これを対数函数と言い、$x=\log_a y$ と書く（この時、aを底と言う）



↑指数函数と対数函数
（$1<a$ の場合の図）

注）実は、逆函数は（上の図からも分かるように）$y=x$ で函数を折り返したものになっている。

わかり易く書くと、
$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$ というコトである。（$\longrightarrow$ だから、$\begin{cases} x=\log_a(a^x), \\ y=a^{\log_a y} \end{cases}$ が成り立つ。）

対数函数の性質をいくつか…（$0<a,\ a\neq1,\ x,y\in\mathbb{R}$ として）

1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
2. $\log_a(x^b)=b\log_a x$ for ${}^\forall b\in\mathbb{R}$
3. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ for $0<b,\ b\neq1.$

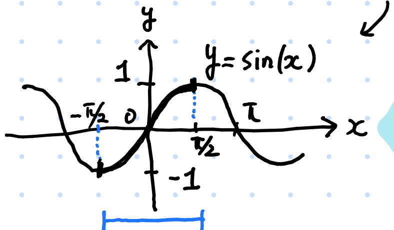
Challenge! 自分で確認してみよう。
微分計算でけっこう用いるゾ。

なお、$\log_e x$ を特別に自然対数と呼び、$\ln x$ と書いたりする。

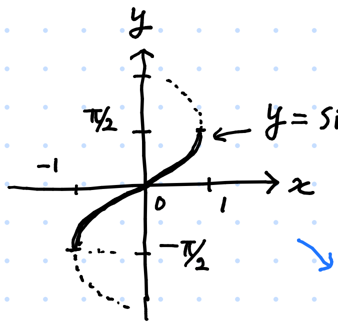
$\tan(x)$ に対する $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$（整数）のコト。

三角函数と逆三角函数：三角函数 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ はごく一部を除いて連続だが、周期的函数なので $(-\infty,\infty)$ でみると単調ではない。
そこで x を制限し、その条件下で逆函数を考える。

正弦函数 $\sin(x)$ と逆〃



「xをここに制限して単調性を確保して」が前提。
xをどこに制限するかは実は変更可能。
xを $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限するのが $\sin^{-1}$ を考える時の標準。



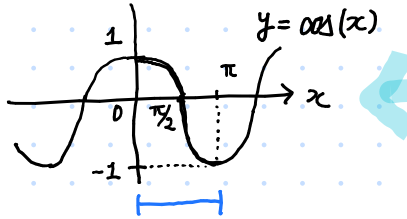
$\leftarrow y=\sin^{-1}(x)$ （$=\mathrm{Arcsin}(x)$ と書いたりする）

この A が大文字なのは、元の $\sin(x)$ で x を $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限したコトを意味する。
だから、元の $\sin(x)$ での x の制限範囲が一般の場合は $\arcsin(x)$ などと小文字で書く。

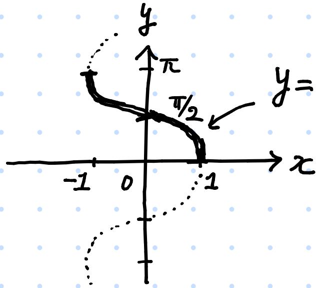
注）教科書では $\mathrm{Sin}^{-1}(x)$ と書いているが、あまり一般的ではない…

こちらは y が $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限される形になる。

$\cos(x)$
余弦函数とその逆函数.



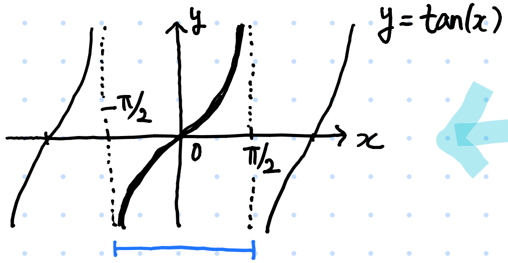
cos(x)ではxをココに制限して逆函数を考えるのが標準.



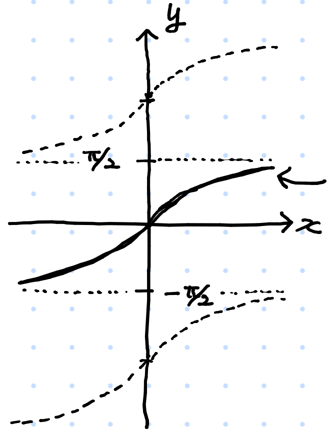
$y = \cos^{-1}(x) = \mathrm{Arccos}(x)$

← yの値は $[0, \pi]$ に.

$\tan(x)$
正接函数とその逆



tan(x)では xをココに制限して逆函数を考えるのが標準的.



← $y = \tan^{-1}(x) = \mathrm{Arctan}(x)$

← yの値は $[-\pi/2, \pi/2]$ に.

ついでに… 双曲線函数.

「ハイパーボリックサイン」と読む. 他も同様.

双曲正弦函数 $\sinh(x) := \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

〃 余 〃 $\cosh(x) := \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

〃 正接 〃 $\tanh(x) := \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$