問1: 一階微分と二階微分が計算できれば良い.

(a)

In [1]:
```
using SymPy
@syms x y

eq_f = x^2 * sin(1/x)
```

Out[1]: $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

In [2]:
```
d1_f = diff( eq_f, x )
```

Out[2]: $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

In [3]:
```
d2_f = diff( d1_f, x )
```

Out[3]: $2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} - \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

(b)

In [4]:
```
f_0 = subs( eq_f, (x, 2/PI ))
```

Out[4]: $\frac{4}{\pi^2}$

In [5]:
```
df_0 = subs( d1_f, (x, 2/PI ))
```

Out[5]: $\frac{4}{\pi}$

よって接線の式は $y - 4/\pi^2 = (4/\pi)(x - 2/\pi)$

(c)

In [6]:
```
series( eq_f, x, 2/PI, 3)
```

Out[6]: $\frac{4}{\pi^2} + \frac{4\left(x - \frac{2}{\pi}\right)}{\pi} + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)\left(x - \frac{2}{\pi}\right)^2 + O\left(\left(x - \frac{2}{\pi}\right)^3; x \to \frac{2}{\pi}\right)$

念の為に、2階微分項の数値を確認しておく.

In [7]:
```
subs( d2_f, (x, 2/PI))
```

Out[7]: $2 - \frac{\pi^2}{4}$

問2: 微分の変数変換

コンピュータで強引に計算するなら以下の通り.

In [8]:
```
eq_g = x*y^2 / (x^2 + y^4)
```

Out[8]:

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

In [9]:
```
@syms u v
```

Out[9]:
```
(u, v)
```

In [10]:
```
eq_g2 = subs( eq_g, (x, u+v), (y, u-v) )
```

Out[10]:

$$\frac{(u-v)^2(u+v)}{(u-v)^4+(u+v)^2}$$

In [11]:
```
eq_g3 = simplify( diff( eq_g2, v ) )
```

Out[11]:

$$\frac{(u-v)\left((-u-3v)\left((u-v)^4+(u+v)^2\right)-2(u-v)(u+v)\left(u+v-2(u-v)^3\right)\right)}{\left((u-v)^4+(u+v)^2\right)^2}$$

In [12]:
```
subs( eq_g3, (u, 3/2), (v, 1/2) )
```

Out[12]:

$$-0.6$$

ただし、$\partial f/\partial v = \partial f/\partial x - \partial f/\partial y$ というところまで連鎖律で計算しておけば下記のように出来る.

In [13]:
```
eq_gv = diff( eq_g, x ) - diff( eq_g, y )
```

Out[13]:

$$-\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}+\frac{4xy^5}{(x^2+y^4)^2}-\frac{2xy}{x^2+y^4}+\frac{y^2}{x^2+y^4}$$

In [14]:
```
subs( eq_gv, (x, 2), (y, 1))
```

Out[14]:

$$-\frac{3}{5}$$

問3: 極小・極大

In [15]:
```
@syms z
eq_h = x^2 + y^2 + z^2 - x*y + y*z + 4*x - y + 3
```

Out[15]:

$$x^2 - xy + 4x + y^2 + yz - y + z^2 + 3$$

In [16]:
```
eq_hx = diff( eq_h, x )
eq_hy = diff( eq_h, y )
eq_hz = diff( eq_h, z )
```

Out[16]:

$$y + 2z$$

In [17]:
```
eq_hx, eq_hy, eq_hz
```

Out[17]:
```
(2*x - y + 4, -x + 2*y + z - 1, y + 2*z)
```

In [18]:
```
A = [
    2 -1 0
    -1 2 1
    0 1 2
]
b = [ -4, 1, 0 ]
```

Out[18]:
```
3-element Vector{Int64}:
 -4
  1
  0
```

In [19]:
```
A * [x, y, z]
```

Out[19]:

$$\begin{bmatrix} 2x-y \\ -x+2y+z \\ y+2z \end{bmatrix}$$

In [20]:
```
A \ b
```

Out[20]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -2.5
 -1.0
  0.49999999999999994
```

In [21]:
```
x0 = [ -5/2, -1, 1/2 ]
```

Out[21]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -2.5
 -1.0
  0.5
```

In [22]:
```
A*x0
```

Out[22]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -4.0
  1.0
  0.0
```

In [23]:
```
# 確認
A*x0 - b
```

Out[23]:
```
3-element Vector{Float64}:
 0.0
 0.0
 0.0
```

In [24]:
```
H = hessian(eq_h, [x, y, z])
```

Out[24]:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

In [25]:
```
using LinearAlgebra
det(H) # この値が正ならば極小.
```

Out[25]: 4

In [26]:
```
# f の値
subs( eq_h, (x, -5/2), (y, -1), (z, 1/2))
```

Out[26]: -1.5

よって、$(x,y,z) = (-5/2, -1, 1/2)$ で関数 f は極小で、そのときの値は -1.5 である.

問4: Lagrange の未定係数法

In [27]:
```
@syms l # 未定係数
eq_fl = x^2 + y^2 + x - y + l*( x*y + 1)
```

Out[27]: $l(xy+1) + x^2 + x + y^2 - y$

In [28]:
```
eq_flx = diff( eq_fl, x )
eq_fly = diff( eq_fl, y )
eq_fll = diff( eq_fl, l )
```

Out[28]: $xy + 1$

In [29]:
```
eq_flx, eq_fly, eq_fll
```

Out[29]:
```
(l*y + 2*x + 1, l*x + 2*y - 1, x*y + 1)
```

In [30]:
```
B = [
    2 l
    l 2
]
vb = [ -1, 1 ]
```

Out[30]:
```
2-element Vector{Int64}:
 -1
  1
```

In [31]:
```
B*[x, y]
```

Out[31]: $\begin{bmatrix} ly+2x \\ lx+2y \end{bmatrix}$

In [32]:
```
vx = B \ vb # (x,y) を計算する
```

Out[32]: $\begin{bmatrix} \frac{1}{l-2} \\ -\frac{1}{l-2} \end{bmatrix}$

In [33]:
```
vx[1]*vx[2] + 1 # そして、制約式に代入すると…
```

Out[33]: $1 - \frac{1}{(l-2)^2}$

上の式が 0 にならないといけないので、$l = 1$ or $l = 3$ であることがわかる.

In [34]:
```
Hl = hessian( eq_fl, [x,y,l] )
```
Out[34]:
$$\begin{bmatrix} 2 & l & y \\ l & 2 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$l = 1$ のときをチェックする．このとき、$x = -1, y = 1$ となるので...

In [35]:
```
Hl_1 =
[ 2 1
1 2 ]
# 実は見るべきなのはこの部分
```
Out[35]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
 2  1
 1  2
```
In [36]:
```
det(Hl_1) # 正だったら極小
```
Out[36]:
```
3.0
```
In [37]:
```
subs( eq_fl, (x, -1), (y, 1), (l, 1)) # そこでの f の値
```
Out[37]: 0

$l = 3$ のときも一応チェックする．このとき、$x = 1, y = -1$ となるので...

In [38]:
```
Hl_3 = [
    2 3
    3 2
]
```
Out[38]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
 2  3
 3  2
```
In [39]:
```
det(Hl_3) # 負だったら極大
```
Out[39]:
```
-5.0
```
In [40]:
```
subs( eq_fl, (x, 1), (y, -1), (l, 3)) #そのときの f の値
```
Out[40]: 4

というわけで、$y > 0$ での極値については、$(x, y) = (-1, 1)$ で関数 $f(x, y)$ は極小であり、値は 0 となる．

In [ ]: