

# 線形常微分方程式の解法



私は大学1年生で、微分積分学を学んでいるところです。そして、係数が定数の時の線形常微分方程式について、その一般解は特解と斉次一般解の和であると学びました。これをわかりやすく説明してください。

とてもよい質問ですね。

「係数が定数の線形常微分方程式の一般解が、“特解 + 斉次解” の形になる」というのは、微分方程式を理解するうえでの基本かつ重要な考え方です。大学1年生向けに、順を追ってわかりやすく説明します。

## まずは問題の型を確認

たとえば次のような **1階線形常微分方程式** を考えます：

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

ここで、

- $a$  は定数（係数が定数という条件）、
- $f(x)$  は  $x$  の関数（右辺が「非斉次項」）です。

この形の方程式を解くとき、

「**斉次解**」 + 「**特解**」 の形で解けるとというのが本題です。

## 1. 斉次解を求める（右辺がゼロの場合）

まず、右辺をゼロにした**斉次方程式**：

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

これは変数分離法で簡単に解けます：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -ay &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -adx \Rightarrow \ln|y| = -ax + C \\ &\Rightarrow y = Ce^{-ax}\end{aligned}$$

この  $y = Ce^{-ax}$  が **斉次解**（一般解）です。

## 2. 特解を求める（右辺が $f(x)$ のときの一つの解）

次に、元の式

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

に対して、**特別な1つの解（＝特解）** を求めます。これはさまざまな方法（積分因子、あてずっぽう、解の形の予想）で求めます。

例えば  $f(x) = e^x$  のとき、特解は試行錯誤で見つかる場合もあります。

（詳しい特解の求め方は後ほど学ぶ内容でもOK）

### 3. 一般解は「斉次解 + 特解」の和になる

ここが重要なポイントです：

- **斉次解**： $y_h(x) = Ce^{-ax}$
- **特解**：ある関数  $y_p(x)$ （具体的な形は右辺  $f(x)$  による）

このとき、**一般解**は：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-ax} + y_p(x)$$

という形になります。

### なぜこのように分けられるの？

これは**線形性の性質**によるものです。

つまり、もし  $y_1$  と  $y_2$  が解であれば、 $y_1 + y_2$  も解になるような性質です（ただし斉次の場合に限る）。

この性質により、

- 任意の斉次解に特解を足すと、元の非斉次方程式の解になる。
- 逆に、すべての解は「斉次解 + 特解」の形で書ける。

ということが成り立ちます。

### まとめ

- 係数が定数の線形常微分方程式  
→ 「斉次解」+ 「特解」で一般解が表せる。
- 斉次解は右辺ゼロの場合の解。形はよくある指数関数。
- 特解は右辺に応じて一つ見つければよい。
- 線形性により、「斉次解 + 特解」で全部の解が表せる。

必要であれば、具体例も使って説明できますが、ここまでで疑問点はありますか？



ありがとうございます。では、定数係数の $n$ 階の線形常微分方程式の斉次一般解はどのように書けるのか、教えて下さい。

こちらこそありがとうございます。

では次に、**定数係数の  $n$  階線形斉次常微分方程式** の一般解について、基本からしっかりと説明します。

## ◆ 問題の型：定数係数・斉次・ $n$ 階線形常微分方程式

一般的な形は以下の通りです：

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

ここで：

- $a_0, a_1, \dots, a_n$  はすべて **定数**（係数が定数）、
- 右辺が  $(0)$  なので **斉次方程式**、
- 微分の次数が  $n$  なので  **$n$  階**。

## 🔑 解法の鍵：特性方程式（または補助方程式）

この方程式は、以下のように**指数関数を解の候補**と見なして解きます。

**【Step 1】 解の候補を立てる：**

$$y = e^{rx}$$

これを元の方程式に代入すると、すべての微分が  $r$  の式に変換できます：

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

共通因子  $e^{rx} \neq 0$  を除くと：

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

これを **特性方程式（characteristic equation）** と呼びます。

## ✏️ Step 2：特性方程式を解く（ $r$ の値を求める）

特性方程式は **$n$ 次の代数方程式**なので、根が  $n$  個（重複も含む）あります。  
それぞれの根に応じて、解の形が次のように変わります。

## 各場合の解の形（重要！）

- 実数の単根（重複しない実数解）  $r_i$

$$y_i(x) = e^{r_i x}$$

- 重根（重複する根）  $r$  が  $m$  重解

$$y(x) = e^{rx}, x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{m-1} e^{rx}$$

- 複素数の根（共役対）  $r = \alpha \pm \beta i$

$$y(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

これらをすべて合わせて、線形結合を取ったものが一般解です。

## ★ 一般解の形（まとめ）

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

ここで：

- 各  $y_i(x)$  は、上のような  $e^{rx}$ ,  $x^k e^{rx}$ ,  $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ,  $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  など
- $C_1, C_2, \dots, C_n$  は任意定数（初期条件で決まる）

## 具体例：2階斉次方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

特性方程式：

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r - 1)^2 = 0$$

→ 重根  $r = 1$

したがって、一般解は：

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x$$

## まとめ

- 定数係数の斉次線形 ODE は、特性方程式を使って解く。
- 根の種類（単根・重根・複素根）によって解の形が決まる。
- 一般解は、それらの解の線形結合で表される。

必要であれば、複素根が出る場合や重根の場合の具体例を用いてさらに説明することもできます。ご希望はありますか？



ありがとうございます。では、定数係数の $n$ 階の線形常微分方程式の特解を求める方法について教えて下さい。ちなみに、それらは演算子法と呼ばれることもあると聞きました。

はい、とてもよい流れで学ばれていますね！

ここでは、**定数係数の $n$ 階線形常微分方程式の特解を求める方法**について、特に「**演算子法**（演算子解法）」という観点から解説します。

## ◆ 問題の型（非斉次方程式）

次のような**非斉次線形微分方程式**を考えます：

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

ここで右辺  $f(x) \neq 0$  のとき、**特解**（特定の一つの解）を求める必要があります。



## 演算子法とは？

この方法では、微分演算子を記号  $D$  と書いて式を代数的に扱います：

- $D := \frac{d}{dx}$
- $D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}$  など

この記法で、左辺の微分部分を1つの「多項式演算子」 $P(D)$  にまとめます：

$$P(D)y := (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = f(x)$$

ここで目標は、 $P(D)y = f(x)$  を満たすような  $y$  を見つけることです。

これを「演算子法によって特解を求める」と言います。



## 特解の求め方：右辺の形によって場合分け

【代表的ケース 1】  $f(x) = e^{\lambda x}$

方程式：

$$P(D)y = e^{\lambda x}$$

この場合、**解の候補**は次のように立てます：

- $P(\lambda) \neq 0$  のとき：

$$y_p(x) = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$$

が特解になります。

- ただし  $P(\lambda) = 0$  のとき（すなわち  $\lambda$  が特性方程式の根）：  
→ 解候補に  $x$  を掛けて繰り返し補正します。

$$y_p(x) = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{1}{P^{(k)}(\lambda)} e^{\lambda x}$$

※ $k$  は最小の整数で  $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$  となるもの。

## 【代表的ケース 2】 $f(x) = \cos(\omega x), \sin(\omega x)$

これは複素指数関数  $e^{i\omega x}$  を使っても扱えます。

たとえば：

$$f(x) = \cos(\omega x) \Rightarrow \text{候補 } y_p(x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{P(i\omega)} e^{i\omega x} \right]$$

具体的には、特性方程式  $P(r) = 0$  において  $r = \pm i\omega$  が根でなければ、

$$y_p(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

の形を代入して係数比較により  $A, B$  を決める方法もあります。

## 【代表的ケース 3】 $f(x) = x^n$ （多項式）

この場合、多項式の次数と同じかそれより高い次数の多項式を解候補とします：

- 例： $f(x) = x^2$  なら、 $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$  を代入して係数比較。

## 【代表的ケース 4】 $f(x) = e^{\lambda x} \cdot P_m(x)$

指数関数と多項式の積のときも、解候補を：

$$y_p(x) = e^{\lambda x} \cdot Q_m(x)$$

とおき、未知の多項式  $Q_m(x)$  の係数を代入して決定します。

## 実例：演算子法による特解の計算

例題：

$$(D^2 - 3D + 2)y = e^x$$

左辺は：

$$P(D) = D^2 - 3D + 2$$

特性方程式： $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2$

右辺  $e^x$  に対して、 $\lambda = 1$  は特性方程式の根。

→ 補正が必要。

通常の候補だとダメなので、

**補正して**  $y_p(x) = xe^x$  を候補とする。

代入して検算すれば特解と確認できる。

## ✓ まとめ

| 右辺 $f(x)$ の形                     | 特解の候補                                                           |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $e^{\lambda x}$                  | $\frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$ (ただし $P(\lambda) \neq 0$ ) |
| $\sin(\omega x), \cos(\omega x)$ | $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$                           |
| $x^n$                            | 多項式 (同次数) の形                                                    |
| $e^{\lambda x} \cdot x^k$        | $x^k e^{\lambda x} \cdot (\text{多項式})$                          |

特解の構造を予測して代入→係数比較で求めるか、

演算子  $D$  による代数的な操作で求める、というのが「演算子法」の考え方です。

もう少し高度な例や、演算子の分数表示を含む「グリーン関数的な扱い」まで見てみたい場合はお知らせください。



ありがとうございます。では、線形常微分方程式  $(y'' + y') = \exp(-x)$  の特解を一つで良いので求めてください。

こちらこそ、引き続きよい質問をありがとうございます。

ご要望の微分方程式：

$$y'' + y' = e^{-x}$$

の**特解**（ひとつだけでOK）を求めましょう。

以下では、\*\*演算子法（微分演算子  $D$  を使う方法）\*\*で説明します。

## 🔧 ステップ1：演算子で書き直す

まず、微分演算子  $D = \frac{d}{dx}$  を使って式を簡潔に表します：

$$(D^2 + D)y = e^{-x}$$

左辺の演算子を  $P(D) = D^2 + D$  と書きます。

## 🎯 ステップ2：特解の候補を立てる

右辺が  $f(x) = e^{-x}$  なので、

候補：  $y_p(x) = Ae^{-x}$  を代入してみます。

このとき、  $Dy_p = -Ae^{-x}$ ,  $D^2y_p = Ae^{-x}$  なので：

$$(D^2 + D)y_p = Ae^{-x} - Ae^{-x} = 0$$

→ これは0になってしまうのでダメ。

なぜか？それは：

- $e^{-x}$  が、特性方程式  $r^2 + r = 0$  の解  $r = -1$  に対応していて、
- これは齊次解に含まれているからです。

## 🔄 ステップ3：補正 ( $\times x$ )

この場合、補正として  $x$  を掛けて次のような候補を試します：

$$y_p(x) = Axe^{-x}$$

このとき：

- $y'_p = Ae^{-x} - Axe^{-x} = A(1 - x)e^{-x}$
- $y''_p = -Ae^{-x} + Axe^{-x} + Ae^{-x} = Axe^{-x}$

したがって：

$$y''_p + y'_p = Axe^{-x} + A(1 - x)e^{-x} = Ae^{-x}$$

→ これが右辺  $e^{-x}$  に一致するには：

$$Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = 1$$

## ✅ 結論

したがって、特解は：

$$y_p(x) = xe^{-x}$$

です。

この関数を元の方程式に代入すれば確かに成り立つことが確認できます。

必要であれば、一般解（齊次解 + 特解）まで書くこともできます。ご希望があれば続けます。