

変数分離法解説



私は大学1年生で、ただいま微分積分学を学んでいます。そこで常微分方程式の変数分離形の話が出てきたのですが、これをわかりやすく説明してください。

もちろんです。変数分離形の常微分方程式（ODE: Ordinary Differential Equation）は、初学者にとってとても重要な解法のひとつです。以下でできるだけわかりやすく説明しますね。

◆ 変数分離形とは？

微分方程式の中で、変数 x と y を左右で「分離」できる形の方程式を指します。具体的には、次のような形です：

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

このように、右辺が「 x だけの関数」と「 y だけの関数」の積に分けられると、「変数分離形」と呼ばれます。

◆ 解き方のステップ（変数分離法）

以下のステップで解くことができます：

① 両辺を dx と $g(y)$ で割る：

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

② 両辺を積分する：

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

③ 両辺を積分した結果から、 y を x の式として解く（できる場合）。

◆ 例題で見てみましょう

例：

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

この方程式は右辺が $x \cdot y$ の形なので、変数分離できます。

Step 1: 分離する

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

Step 2: 積分する

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

→ 結果は：

$$\ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Step 3: 解く（任意定数 C を含む一般解）

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

※ e^C をまとめて $C > 0$ と書きました。

最終的に：

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

◆ 注意点

- **積分のとき**、積分定数を片方（ふつう右辺）にだけ書けばOK。
- **初期条件**（例： $y(0) = 2$ など）があれば、定数 C を決められます。

ご希望なら、演習問題やグラフをつけて解説することもできます。お気軽にどうぞ。



さらに、同次形の場合は変数分離形に変形できるとも聞きました。これについても説明をお願いします。

はい、よい質問です！

同次形（どうじけい）の常微分方程式が変数分離形に変形できるという話は非常に重要です。以下で順を追って解説します。

◆ 1. 同次形とは？

常微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形に書けるものを「**同次形**」の微分方程式と呼びます。

つまり、右辺が x と y の比 (y/x) だけで表されている場合です。

◆ 2. なぜ「変数分離形」にできるのか？

変数分離形に変えるための**置換（変数変換）**を使います：

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx$$

このとき、 y を x の関数として書いたので、微分します：

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

◆ 3. 置換して変数分離形に

元の式に代入：

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) = F(v)$$

一方、左辺は $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

したがって：

$$v + x \frac{dv}{dx} = F(v) \quad \Rightarrow \quad x \frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

これで右辺は v のみ、左辺は x のみという形になります：

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

つまり、**変数分離形**になりました！

◆ 4. 例題で理解する

例題：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

右辺を書き直す：

$$\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

よって：

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

→ これは $\frac{y}{x}$ による関数なので同次形！

ステップ1: 置換 $v = \frac{y}{x}, y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

ステップ2: 代入

$$v + x \frac{dv}{dx} = 1 + v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

ステップ3: 積分

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln|x| + C$$

ステップ4: 元の変数に戻す

$$v = \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C)$$

これが解です。

◆ まとめ

特徴	内容
同次形	$\frac{dy}{dx} = F(y/x)$ などの形
方法	置換 $v = y/x$ により変数分離可能
最終的に	$\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$ となって積分できる

必要であれば、演習問題や図をつけてさらに理解を深めるお手伝いもします！



また、一階線形な常微分方程式であれば原理的には解が積分形で書けると聞きました。これについても説明をお願いします。

はい、よいところに注目されています。

一階線形常微分方程式は、非常に基本でありながら応用範囲の広いクラスで、常に**積分の形で解ける**という強い特徴を持っています。以下にわかりやすく説明します。

◆ 一階線形常微分方程式とは？

一般形は次の通りです：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

ここで、 $P(x)$ と $Q(x)$ は x に関する関数です。

この形の微分方程式は「一階線形微分方程式」と呼ばれます。

◆ 解法の基本原則（積分因子法）

この形の方程式は、**積分因子**（integrating factor）という道具を使って、**積分の形に解を変形**できます。

ステップ1：積分因子を求める

次の関数 $\mu(x)$ を積分因子と呼びます：

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

ステップ2：両辺に積分因子をかける

元の式に $\mu(x)$ をかけます：

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

左辺は次の積の微分と同じになります：

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

ステップ3：両辺を積分する

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x) dx + C$$

ステップ4： y を解く

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)Q(x) dx + C \right)$$

◆ 例題で見てみましょう

例：

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

これは一階線形の形：

$$P(x) = 2, \quad Q(x) = e^x$$

ステップ1：積分因子

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

ステップ2：両辺にかける

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x} y = e^{2x} e^x = e^{3x}$$

左辺は：

$$\frac{d}{dx} [e^{2x} y] = e^{3x}$$

ステップ3：積分

$$e^{2x} y = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

ステップ4：解く

$$y = e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + C \right) = \frac{1}{3} e^x + C e^{-2x}$$

◆ まとめ

ステップ	内容
一般形	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
積分因子	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
変形	$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$
解	$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)Q(x) dx + C \right)$

この方法は、変数分離ができない場合でも使える点が強力です。
ご希望であれば、初期条件付きの問題や応用例も紹介できます。



今の話は完全微分形とも関係しますね。完全微分形について教えてください。

はい、鋭い観察です。

先ほどの話（一階線形方程式や積分因子法）と「完全微分形」は密接に関係しています。

以下で順を追って丁寧に説明します。

◆ 完全微分形とは？

次のような形の微分方程式を考えます：

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

この形の微分方程式が、ある関数 $F(x, y)$ の全微分：

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

と一致する場合、この方程式を「**完全微分形** (exact differential equation)」と呼びます。

つまり、

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

を満たすような関数 $F(x, y)$ が**存在する**とき、その方程式は「完全」です。

◆ 完全微分形の判定方法（対称性条件）

$M(x, y)$ と $N(x, y)$ が連続で偏微分可能であれば、次の条件が満たされていれば完全微分形です：

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

これは「混合偏微分の対称性」（クロス偏微分の等価）に基づく判定法です。

◆ 解き方の手順

1. 確認

まずは完全微分形かどうかを上記の判定でチェック。

2. 関数 $F(x, y)$ を求める

「 $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ 」に基づいてまず F を x について積分：

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$$

（ここで $C(y)$ は積分定数の代わりに「 y だけの関数」になります）

3. $\frac{\partial F}{\partial y}$ と $N(x, y)$ を照合して $C(y)$ を決定

◆ 例題で理解する

例：

$$(2xy + \cos x) dx + (x^2 + e^y) dy = 0$$

ここで：

- $M(x, y) = 2xy + \cos x$
- $N(x, y) = x^2 + e^y$

まず判定：

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

→ 等しいので、これは**完全微分形**です！

解き方：

ステップ1: $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ を積分

$$F(x, y) = \int (2xy + \cos x) dx = x^2 y + \sin x + C(y)$$

ステップ2: $N = \frac{\partial F}{\partial y}$ を使って $C(y)$ を求める

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + C'(y) \stackrel{!}{=} x^2 + e^y \Rightarrow C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = e^y$$

よって：

$$F(x, y) = x^2 y + \sin x + e^y$$

解：

$$F(x, y) = C \quad (\text{任意定数}) \quad \Rightarrow \quad x^2 y + \sin x + e^y = C$$

これが**暗黙解** (implicit solution) **です。

◆ 積分因子と完全微分の関係

場合によっては、最初は完全微分形でない式も、**積分因子** (integrating factor) をかけることで完全微分形にできます。

例：

$$(xy + y^2) dx + x^2 dy = 0$$

は完全ではないが、適切な関数 (たとえば $\mu(x, y) = 1/y^2$) をかけると完全形になることもあります。

◆ まとめ

概念	内容
完全微分形	$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ が $dF = 0$ と書ける形

概念	内容
判定条件	$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
解法	$F(x, y) = C$ の形を求める
関係	積分因子をかけて完全微分形に変形することも可能

必要であれば、**積分因子によって完全形に変える例**もご紹介できます。興味があればどうぞ。



積分因子を求めることは一般に困難と思いますが、それができる典型的な状況を教えてください。

その通りです。**積分因子 (integrating factor) を一般に求めることは難しいのですが**、特定の「よくある形」では**系統的な方法**があります。以下に、積分因子が比較的簡単に見つかる**典型的な3つの状況**を紹介します。

✓ 状況1：一階線形微分方程式

これはもっとも有名で、積分因子が必ず**自動的に作れる**状況です。

形：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

積分因子：

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

これを両辺にかければ解けるようになります（前回説明した通り）。

✓ 状況2：**2変数の微分形 ($M dx + N dy = 0$) が完全ではないが、積分因子が x または y だけの関数

完全ではない微分形に対して、次のような積分因子が見つかることがあります：

微分方程式：

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

判定：

パターンA： $\mu = \mu(y)$ のとき

次をチェック：

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)M] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(y)N]$$

この式が成り立つような関数 $\mu(y)$ を見つけられれば OK。

パターンB： $\mu = \mu(x)$ のときも同様です：

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)M] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)N]$$

具体例：

$$(2xy + y^2) dx + x^2 dy = 0$$

これは完全ではない。

チェックすると、 $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ をかけると：

$$\left(\frac{2x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x^2}{y^2}\right) dy$$

この新しい形は**完全微分形**になります。したがって、 $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ は積分因子です。

✓ 状況3：準同次形または特定の構造を持つもの

特に、 y/x などの同次関数に関係している形で、変数変換や積分因子が自然に見つかることがあります。

例：

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$$

このような式では、 x や y のべきで割ることで、**同次性**が現れ、そこから積分因子が見つかることがあります。

✓ 補足：積分因子の探索の指針

状況	探すべき積分因子
一階線形 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$
$M dx + N dy = 0$ で $\mu = \mu(x)$ を期待	$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}$ を満たすかチェック
$\mu = \mu(y)$ を期待	同様にチェック
同次性がある場合	y/x や x/y での変数変換 or 積分因子として $1/x^n, 1/y^n$ を試す

← END まとめ

積分因子がうまく見つかる典型パターンは以下です：

1. 一階線形方程式 → 常に $e^{\int P(x) dx}$
2. 2変数の微分形で、積分因子が x または y の関数になっている場合
3. 同次性や対称性がある特別な構造を持つ場合

必要なら「積分因子を使って解く練習問題」や、「積分因子が見つからない例」もご紹介できます。どうしますか？



$y = y(x)$ に関する常微分方程式が $x \cdot y' + y = 2 \cdot x \cdot y$ と書かれるとき、この解を求めてください。

与えられた常微分方程式：

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 2xy$$

を解いていきます。

◆ Step 1: 微分方程式を整理

まず右辺を展開して、同類項をまとめます：

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 2xy$$

左辺の y を右辺へ移項：

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = 2xy - y = y(2x - 1)$$

両辺を x で割って：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x - 1)}{x}$$

◆ Step 2: 変数分離形に変換

右辺は y の関数と x の関数の積なので、変数分離可能：

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x - 1}{x} dx$$

右辺を整理：

$$\frac{dy}{y} = \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx$$

◆ Step 3: 両辺を積分

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\ln |y| = 2x - \ln |x| + C$$

◆ Step 4: y を解く

両辺に指数関数をかけて：

$$|y| = e^{2x} \cdot e^{-\ln |x|} \cdot e^C = \frac{C_1 e^{2x}}{|x|} \quad (\text{ただし } C_1 = e^C > 0)$$

したがって、一般解は：

$$y(x) = \frac{C e^{2x}}{x} \quad (\text{ただし } C \in \mathbb{R})$$

 **結論（一般解）：**

$$\boxed{y(x) = \frac{C e^{2x}}{x}} \quad (\text{ただし } x \neq 0)$$

必要であれば初期条件を与えて定数 C を決定することも可能です。