

変数変換による積分



2次元領域 Ω が $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+2y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$ であるとき、積分 $\int_{\Omega} (x-y)^2 dx dy$ の値を独立変数の変数変換を用いて求めてください。

与えられた2次元領域

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$$

に対して、積分

$$\iint_{\Omega} (x - y)^2 dx dy$$

を**変数変換**を用いて求めましょう。

【ステップ1】変数変換の導入

領域の定義に現れる線形結合

- $u = x + 2y$
- $v = x - y$

を新しい変数とします：

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$$

これを逆に解いて、 x, y を u, v の関数として表す：

【ステップ2】逆変換

2式を足して引いて計算：

- $u + v = (x + 2y) + (x - y) = 2x + y$
- $u - 2v = (x + 2y) - 2(x - y) = -x + 4y$

直接式を解いてもよい：

$$\begin{aligned} x &= \frac{2v + u}{3}, \\ y &= \frac{u - v}{3}. \end{aligned}$$

【ステップ3】 ヤコビアン の計算

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$$

ヤコビアン の絶対値 :

$$|J| = \frac{1}{3}$$

【ステップ4】 積分 の式 を新しい変数 で書き換え

関数部分 :

$$(x - y)^2 = v^2$$

領域 :

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1]$$

したがって、新しい変数での積分は :

$$\iint_{|u| \leq 1, |v| \leq 1} v^2 \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v^2 \cdot \frac{1}{3} du dv$$

【ステップ5】 積分 の実行

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{3} v^2 du dv &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 v^2 \left(\int_{-1}^1 du \right) dv = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \int_{-1}^1 v^2 dv \\ \int_{-1}^1 v^2 dv &= \left[\frac{v^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

したがって :

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

【答】

$$\boxed{\frac{4}{9}}$$

このように、線形変換によって領域を矩形に変換し、簡単に積分できました。



2次元領域 Ω が $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2+y^2| \leq a^2, \text{ ただし } a>0\}$ であるとき、積分 $\int_{\Omega} 1 \, dx dy$ の値を独立変数の変数変換を用いて求めてください。

与えられた2次元領域は

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \text{ただし } a > 0$$

これは**原点中心・半径 a の円板領域**です。

このとき、面積要素 $\int_{\Omega} 1 \, dx dy$ は、この円板の面積に一致します。ここでは、****変数変換（極座標変換）****を用いて計算してみましょう。

【ステップ1】 極座標への変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

ヤコビアン（面積要素の変換）：

$$dx dy = r \, dr d\theta$$

【ステップ2】 領域の変換

元の条件 $x^2 + y^2 \leq a^2$ は、極座標では

$$r^2 \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad r \in [0, a]$$

したがって、新しい積分範囲は：

- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $r \in [0, a]$

【ステップ3】 積分の実行

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a 1 \cdot r \, dr d\theta$$

まず内側の積分（ r 方向）：

$$\int_0^a r \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^a = \frac{1}{2} a^2$$

次に外側の積分（ θ 方向）：

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

したがって：

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx dy = 2\pi \cdot \frac{1}{2}a^2 = \pi a^2$$

【答】

$$\boxed{\pi a^2}$$

これは、原点中心・半径 a の円の面積と一致します。変数変換（極座標）により自然に導かれました。



$\int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx$ の値を、重積分を用いて導出できますか？

教科書より
素直な方法を

教えてくれている!!

はい、できます。積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$$

は有名なガウス積分の半区間版であり、値は

$$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

ですが、これを重積分（二重積分）を用いて導出することができます。以下にその標準的な導出方法を示します。

【ステップ1】 まず全体のガウス積分を考える

まず、以下の積分を計算します：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

これは直接は積分できませんが、次のように二乗して二重積分に変換するのがポイントです：

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx dy$$

この重積分は $\mathbb{R}^2$ 全体の上で定義されるため、極座標変換を用いることで評価できます。

【ステップ2】 極座標変換

変換：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi)$$

面積要素：

$$dxdy = r drd\theta$$

関数：

$$e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$$

よって、

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r drd\theta$$

【ステップ3】 積分を実行

まず内側の積分（ r ）：

$$\int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r dr$$

これは置換 $u = r^2, du = 2r dr$ により：

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2}$$

次に外側（ θ ）：

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

したがって：

$$I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}$$

【ステップ4】 元の半区間積分へ

求めたのは：

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

よって、左右対称性から：

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

【結論】

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad (\text{重積分を用いた導出})$$

この方法は、ガウス積分の値の導出としてもっとも標準的な手法です。