

積分の累次計算



2次元領域 Ω が $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{直線 } y = x, \text{ 直線 } x = 1, x\text{-軸 で囲まれた } (x,y) \}$ であるとき、積分 $\int_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy$ の値を2通りの累次積分で求めてください。

2次元領域

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

は、直線 $y = x$ 、直線 $x = 1$ 、および x -軸（すなわち $y = 0$ ）に囲まれた領域です。

この領域における積分

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy$$

を2通りの**累次積分**（すなわち $dx \, dy$ と $dy \, dx$ の順）で求めます。

方法1： $dx \, dy$ の順

この順では、 y は固定して、 x は $y \leq x \leq 1$ を動きます。

領域を y 固定で眺めると、 $y \in [0, 1]$ に対して $x \in [y, 1]$ です。

したがって：

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 x^2 y \, dx \, dy$$

x について積分：

$$\begin{aligned} &= \int_{y=0}^1 y \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 y \left(\frac{1}{3} (1^3) - \frac{1}{3} (y^3) \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y(1 - y^3) dy \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 y \, dy - \int_0^1 y^4 \, dy \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \boxed{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

方法2： $dy \, dx$ の順

この順では、 $x \in [0, 1]$ 、そして各 x に対して $y \in [0, x]$ です。

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x^2 y \, dy \, dx$$

y について積分：

$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

✓ 結論

2通りの累次積分の方法により、どちらも積分値は

$$\boxed{\frac{1}{10}}$$

となります。



ありがとうございます。では、積分 $\int_0^1 \left(\int_{y=x^2}^{y=x} f(x,y) dy \right) dx$ の累次積分の順序を入れ替えてください。

こちらこそありがとうございます。

与えられた積分は：

$$\int_0^1 \left(\int_{y=x^2}^{y=x} f(x,y) dy \right) dx$$

これは $x \in [0, 1]$ に対して、各 x で $y \in [x^2, x]$ の範囲を積分する累次積分です。

✓ 領域の幾何学的理解

この積分の領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ は：

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

これを y を先に積分する形（順序入れ替え）にするには、 y の範囲を定め、そのときの x の範囲を求めます。

1. y の範囲を求める

y は $x^2 \leq y \leq x$ の範囲ですが、 $x \in [0, 1]$ を動かすと、最小値 $y = x^2$ は 0 から 1 の範囲で、最大値 $y = x$ も 0 から 1 の範囲。

これらの交差範囲は：

- $x^2 \leq y \leq x$
- それが可能なのは $y \in [0, 1]$ のうち、 x のとれる範囲が存在するところ

$x^2 \leq y \leq x$ を満たすような x の存在条件は

$$x^2 \leq y \leq x \Rightarrow y \in [0, 1]$$

かつ、 $x^2 \leq y \leq x \Rightarrow x \in [y, \sqrt{y}]$ (後述)

2. 領域を y 固定で眺める

$y \in [0, 1]$ のとき、 x は

$$x^2 \leq y \Rightarrow x \geq \sqrt{y}, \quad y \leq x \Rightarrow x \geq y$$

逆に書くと：

$$x^2 \leq y \leq x \Rightarrow x \in [y, \sqrt{y}]$$

ただし、これは意味があるのは $y \in [0, 1]$ のうち $y \leq \sqrt{y}$ のときだけです。

この条件は $y \leq \sqrt{y} \Rightarrow y \leq 1$ かつ $y \geq 0$ を満たしますが、実はそれが成り立つのは $y \in [0, 1]$ かつ $y \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y \leq 1$ かつ $y \geq 0$

$\sqrt{y} \geq y$ が成り立つのは $y \in [0, 1]$

なので結論として：

✅ 順序を入れ替えた積分表示：

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

✅ 結論

積分の順序を入れ替えると：

$$\boxed{\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy}$$

が正しい順序入れ替えです。